Combinatória e Problemas em Redes de Telecomunicações

Frédéric Havet[1]**, Cláudia Linhares Sales**[2*]

[1]Projet Mascotte, I3S(CNRS, UNS) et INRIA
2004 route des Lucioles BP93, 06902 Sophia Antipolis Cedex, France

[2]ParGO, Departamento de Computação, Universidade Federal do Ceará
Campus do Pici – Bloco 910 – CEP 60455-760 – Fortaleza – CE

`fhavet@sophia.inria.fr, linhares@lia.ufc.br`

Abstract. *In this paper, we summarize some problems arising in telecommunication networks which have been studied in the scope of the cooperation between our teams ParGO (UFC) and Mascotte (INRIA). We also present their modeling by graph coloring problems and some partial results we have obtained.*

Resumo. *Nesse artigo, vamos mostrar alguns dos problemas em redes de telecomunicações que vendo sendo abordados dentro da cooperação entre as equipes ParGO (UFC) e Mascotte (INRIA). Em particular, vamos mostrar a modelagem desse problemas por problemas de coloração em grafos e alguns resultados parciais que obtivemos.*

1. Introdução

Todos os problemas em redes de telecomunicações citados aqui foram modelados como problemas de coloração cuja versão clássica segue. Dado um grafo $G = (V, E)$, uma k-coloração própria de G é uma função $c \longmapsto \{1, \ldots, k\}$ tal que se u e v, vértices de G, são adjacentes, então $c(u) \neq c(v)$. O número cromático de G é o menor número de cores k tal que G admite uma k-coloração própria. O problema consiste em dado um grafo $G = (V, E)$, determinar o seu número cromático. Este problema é um dos mais estudados em teoria dos grafos pela sua relevância tanto do ponto de vista teórico, visto que até mesmo encontrar uma aproximação para o número cromático é um problema computacionalmente difícil [Yannakakis and Lundi 1994], como pela suas inúmeras aplicações. Nas seções que seguem abordaremos três problemas modelados por variações do problema de coloração acima.

2. Alocação de Frequências

Considere um conjunto de antenas V para o qual deve-se associar um **conjunto** de freqüências. As antenas não são iguais nas suas necessidades de freqüências e portanto associa-se através de uma função de peso $p : V(G) \rightarrow \mathcal{N}$, uma demanda a cada antena. A proximidade das antenas no espaço (usualmente no plano) provoca interferências ou ruídos nas comunicações. Essas interferências mútuas são modeladas por um conjunto de arestas E, ou seja, se há interferência entre duas antenas, há uma arestas entre os vértices correspondentes. Deseja-se, a priori, atribuir conjuntos de freqüências distintos a antenas

*Este autor é parcialmente financiado pelo CNPq

que se interferem mutuamente. Logo, a rede pode ser modelada por um grafo ponderado (G, p) para o qual deseja-se encontrar uma atribuição de conjuntos de freqüências a cada vértice de forma que o número de freqüências utilizadas seja mínimo e vértices adjacentes não compartilhem freqüências. Portanto, deseja-se, em outras palavras, determinar o menor inteiro k tal que G admite uma coloração onde cada vértice v de G recebe a quantidade de cores solicitada, denotada pelo seu peso $p(v)$, e que vértices adjacentes não compartilhem cores. O problema de determinar esse menor inteiro k é conhecido como o problema de coloração ponderada. Entretanto, do ponto de vista prático, algumas redes podem lidar com alguma, até um certo limite k, interferência entre as antenas. Ou seja, tolera-se que uma freqüência atribuída a uma antena seja compartilhada por até k de seus vizinhos. Trata-se da coloração k-imprópria de vértices, bastante estudada nos grafos não ponderados. Mais formalmente, o problema é definido como:

Definição 1 (Coloração ponderada k-imprópria) *Dado um grafo ponderado (G, p), uma r-coloração ponderada de (G, p) é uma função $C : V \mapsto \mathcal{P}\{1, \ldots, r\}$ tal que $|C(v)| \geq p(v)$. Uma coloração ponderada C de (G, p) é k-imprópria se para qualquer cor i, o conjunto de vértices colorido com a cor i induz um subgrafo de G de grau máximo k. O número cromático ponderado k-impróprio de (G, p), denotado por $\chi_k(G, p)$, é o menor l tal que (G, p) admite uma l-coloração ponderada k-imprópria.*

Observe que, para $k = 0$, o problema acima é equivalente ao problema de coloração ponderada mencionado anteriormente. Além disso, quando $k = 0$ e $p(v) = 1$, para todo $v \in V(G)$, o problema acima é equivalente ao problema clássico de coloração. Em 2000, McDiarmid and Reed [McDiarmid and Reed 2000] provaram que é $\mathcal{NP}$-completo decidir se o número cromático ponderado de uma malha hexagonal é 3 ou 4. Com respeito à coloração imprópria, Havet, Kang and Sereni [Havet et al. 2005] generalizaram esse resultado provando que para $0 \leq k \leq 5$, o problema de determinar se uma malha hexagonal ponderada é 3-colorível de forma k-imprópria é também $\mathcal{NP}$-dificil. Em 2007, J-C. Bermond et al determinaram o número cromático ponderado k-impróprio das malhas hexagonais [Bermond et al. 2007] e das grades quando todos os vértices têm pesos iguais [Bermond et al. 2009]. Quando os vértices da malha têm pesos distintos, apenas algoritmos aproximativos foram encontrados. Um algoritmo aproximativo para encontrar uma coloração k-imprópria com fator de aproximação α_k é dito α_k-aproximativo, significando que a coloração retornada pelo algoritmo é k-imprópria e utiliza no máximo $\alpha_k \times \chi_k(G, p) + c$ colors, onde c é uma constante.

Teorema 1 *Para $1 \leq k \leq 5$, existe um algoritmo α_k-aproximativo para encontrar uma coloração k-imprópria para uma malha hexagonal ponderada, onde $\alpha_1 = \frac{20}{11}$, $\alpha_2 = \frac{12}{7}$, $\alpha_3 = \frac{18}{13}$, $\alpha_4 = \frac{80}{63}$, and $\alpha_5 = \frac{41}{36}$.*

Teorema 2 *Para $1 \leq k \leq 3$, existe um algoritmo α_k-aproximativo para encontrar uma coloração k-imprópria para uma grade ponderada, onde $\alpha_1 = \frac{3}{1}$, $\alpha_2 = \frac{27}{20}$, and $\alpha_3 = \frac{19}{16}$.*

3. Alocação de Buffers em Canais de Comunicação

Considere uma rede de comunicação definindo um grafo $G = (V, E)$, onde os vértices são roteadores e as arestas representam canais de comunicação. Para controlar as interferências, suponha que cada roteador pode estar envolvido em no máximo uma comunicação a cada unidade de tempo. Logo, um conjunto de comunicações simultâneas viáveis representa um *emparelhamento* do grafo. O problema de coloração proporcional se apresenta quando consideramos que as demandas de comunicação obedecem a um padrão com respeito à quantidade *bits* a serem enviados. Cada demanda representa na verdade um caminho em G, entre a origem e o destino, e um padrão de comunicação (com respeito à quantidade de bits). O envio dos dados ao longo do caminho provoca a ativação de um canal em uma certa proporção do tempo. Essa *proporção* é modelada por uma função de peso $w : E(G) \rightarrow [0, 1]$. O problema torna-se agora, encontrar, se possível, um escalonamento periódico da ativação dos canais satisfazendo às proporções. Para diminuir a fila de mensagens (*buffers*) nos roteadores e para aumentar o total de comunicações ao longo do tempo, deseja-se encontrar o menor período no qual as comunicações podem ser realizadas satisfazendo às proporções dadas. Esse problema levou à definição do seguinte parâmetro [Huc et al. 2008]:

Definição 2 (Coloração Proporcional) *Dado um grafo ponderado (G, w), uma* coloração proporcional *de (G, w) é uma função $C : E \rightarrow \mathcal{P}(\{1, \ldots, c\})$ tal que para toda $e \in E$, temos*

1. $|C(e)| \geq cw(e)$*; e*
2. *para todo $e, f \in E^2$, $e \cap f \neq \emptyset \Rightarrow C(e) \cap C(f) = \emptyset$.*

Chamamos de índice cromático proporcional de G, $\chi'_\pi(G, w)$, o número mínimo de cores para o qual uma coloração proporcional de (G, w) existe. Se tal coloração não existe, definimos $\chi'_\pi(G, w) = \infty$.

Observe que há instâncias do problema que não têm solução. Nesses casos, pela definição acima, $\chi'_\pi(G, w) = \infty$. Determinar $\chi'_\pi(G, w)$ é $\mathcal{NP}$-difícil, entretanto, dada uma instância qualquer do problema, pode-se determinar se ela admite ou não uma solução em tempo polinomial [Huc et al. 2008]. F. Huc et al mostraram que limites inferiores e superiores podem ser obtidos em tempo polinomial. Além disso, no mesmo trabalho, mostraram que o problema é fácil para grafos bipartite ponderados, quando as instâncias admitem solução.

4. Protocolos em Redes Distribuídas de Duplo Acesso

Considere uma rede para transmissão de mensagens de tempo real formada por uma seqüência de estações $s_1, \ldots, s_n$, ligadas por canais que transmitem dados em apenas uma direção, ou seja, a estação s_i transmite dados para uma estação s_j, $j > i$, por um canal, mas existe outro canal para transmitir dados de s_j para s_i. Existe ainda nessa rede um gerenciador de pacotes que cria pacotes de tamanho fixo para o envio das mensagens que possui um controle da alocação da banda e dos pacotes, através de identificadores de circuitos virtuais. Quando uma estação s_i deseja enviar dados para uma estação s_j, $j > i$, ela faz uma requisição ao gerenciador de pacotes. O gerenciador a envia os pacotes em quantidade suficiente para que sejam enviados todos os dados, com o seu devido identificador de circuito virtual. A estação aloca os dados nos pacotes e os envia para a estação seguinte s_{i+i} e assim por diante, até a estação s_j, onde os dados são desempacotados e os pacotes continuam o trajeto até o fim da rede, passando por todas as estações de s_j a s_n. Esse tipo de protocolo de rede é conhecido como protocolo de controle de acesso de mídia em redes distribuídas de duplo canal.

Para melhor reaproveitar os pacotes após seu desempacotamento, uma outra versão para o problema de Coloração Ponderada pode ser utilizado neste protocolo.

Suponha que um conjunto de dados precisam ser transmitidos entre diversos pares de estações. Construa um grafo G ponderado, simples e não-direcionado de tal forma que para cada dado a ser transmitido é associado um vértice. Se dois dados não podem compartilhar o mesmo conjunto de pacotes, ou seja, se a estação de destino do primeiro a ser enviado possui um índice maior que o da a estação de origem do segundo, então é adicionada uma aresta entre os vértices que representam esses dados. O peso de cada vértice deve ser a quantidade de pacotes que o dado associado precisa para ser transmitido. Uma coloração ponderada ótima de G representa uma atribuição de identificadores de circuitos virtuais aos dados que otimiza a reutilização dos pacotes desse protocolo, pois os vértices que receberam a mesma cor devem ser enviados pelo mesmo conjunto de pacotes e a quantidade de pacotes de cada circuito virtual corresponde exatamente ao maior peso de um vértice nesse circuito. Definimos a seguir formalmente o problema de coloração ponderada, definido por Guan e Zhu [Guan and Zhu 1997]. Em uma coloração própria, os vértices coloridos com uma mesma cor i formam um conjunto independente que é chamado usualmente de *classe de cor*. Sendo assim, uma k-coloração possui k classes de cores. Dada uma k-coloração $c = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ de G, o peso de cada classe de cor de c_i, $w(c_i)$ é dado pelo maior peso de um vértice em c_i.

Definição 3 (Número Cromático Ponderado) *O* número cromático ponderado *de $G = (V, E)$, $\chi_p(G)$ é o mínimo $\sum_{c_i \in c} w(c_i)$, para toda coloração própria de G.*

Observe que quando todos os vértices do grafo têm peso unitário, esse problema corresponde ao problema clássico de coloração. Dada a dificuldade do problema de coloração ponderada, tenta-se encontrar resultados para subclasses de grafos. Para grafos com largura em árvore limitada, B. Reed e C. Linhares Sales determinaram a ordem de grandeza do número cromático ponderado [Linhares Sales and Reed 2006]:

Teorema 3 *Seja $G = (V, E)$ qualquer grafo ponderado com largura em árvore limitada ω. Então, $\chi_p(G)$ é $O(\omega \lg n)$.*

Para uma subclasse dos grafos P_4-esparsos, J.C. Araújo, C. Linhares Sales e I. Sau obtiveram [Araújo et al. 2009] o seguinte resultado:

Teorema 4 *Seja G um grafo P_4-esparso cuja a árvore de decomposição modular não contém nós paralelos. Então o número cromático ponderado de G pode ser determinado em tempo polinomial.*

References

Araújo, J., Linhares Sales, C., and Sau, I. (2009). Weighted coloring in p_4-sparse graphs. manuscript in preparation.

Bermond, J.-C., Havet, F., Huc, F., and Linhares Sales, C. (2007). Allocation de fréquences et coloration impropre des graphes hexagonaux pondérés. *In: AlgoTel 2007 (9ème rencontres francophones sur les aspects algorithmiques de télécommunications)*, 9:53–56.

Bermond, J.-C., Havet, F., Huc, F., and Linhares Sales, C. (2009). Improper coloring of weighted grid and hexagonal graphs. manuscript in preparation.

Guan, D. and Zhu, X. (1997). A coloring problem for weighted graphs. *Information Processing Letters*, 61:77–81.

Havet, F., Kang, R., and Sereni, J.-S. (2005). Improper colourings of unist disk graphs. *Eletronic Notes in Discrete Mathematics*, 22:123–128.

Huc, F., Linhares Sales, C., and Rivano, H. (2008). The proportional colouring problem: Optimizing buffers in radio mesh networks. *Eletronic Notes in Discrete Mathematics*, 30:141–146.

Linhares Sales, C. and Reed, R. (2006). Weighted coloring on graphs with bounded tree width. *In: 19th International Symposium on Mathematical Programming*, pages 146–146.

McDiarmid, C. and Reed, B. (2000). Channel assignment and weighted coloring. *Networks*, 36:114–117.

Yannakakis, M. and Lundi, C. (1994). On the hardness of approximating minimization problems. *Journal of ACM*, 41(5):960–981.