

Sistema Híbrido Inteligente Combinado com a Teoria da Perturbação para Previsão de Séries Temporais

Paulo S. G. de Mattos Neto¹, Aranildo Rodrigues L. J.², Tiago A. E. Ferreira², Germano C. Vasconcelos¹

¹Centro de Informática – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Av. Prof. Luiz Freire s/n – Cidade Universitária
Recife – PE – Brasil – 50732-970

²Departamento de Estatística e Informática – Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) – Rua Manoel Medeiros s/n – Dois Irmãos
Recife – PE – Brasil

{psgmn, gcv}@cin.ufpe.br, tiago@deinfo.ufrpe.br

Abstract. *Most of the approaches described in the literature for time series prediction only employ the time series of interest to perform forecasting, discarding the error series coming from differences between the actual series and the model forecasting. Inspired on the Perturbation Theory, the Perturbative Time-lag Added Evolutionary Forecasting Method (P-TAEF Method) is a new method which applies treatment of the error series in conjunction with the original series to construct a more accurate time series forecasting model. Experiments conducted with the P-TAEF Method are compared to conventional artificial intelligence techniques illustrating the boosted performance of the method.*

Resumo. *A maioria das abordagens na literatura para previsão de séries temporais utilizam apenas a própria série para realizar a previsão dos valores futuros, descartando a série de erros proveniente da diferença entre os dados reais e a previsão do modelo. Inspirado na Teoria da Perturbação, o Método Perturbative Time-lag Added Evolutionary Forecasting (Método P-TAEF) foi desenvolvido para introduzir a previsão das séries de erro em combinação com a previsão da série original na construção de um modelo mais eficiente e preciso. Experimentos foram realizados com o método P-TAEF e técnicas convencionais da IA, ilustrando a melhoria da performance na previsão de séries temporais.*

1. Introdução

Na literatura, de forma geral, os modelos de previsão utilizam apenas a série de estudo para realizar a previsão, focando apenas nas informações contidas no conjunto de dados de interesse. Entretanto, o modelo preditivo pode não detectar todos os padrões de informação relevante contidos na série temporal de interesse. Essas informações que não forem detectadas pelo modelo de previsão podem estar contidas na série de resíduos (série de erro), proveniente da diferença entre os dados reais da série e a previsão do modelo. Convencionalmente, os métodos tradicionais de previsão não abordam o tratamento da série de erro, já que na maioria dos estudos considera-se que o erro tem o comportamento de um ruído branco, não contendo mais nenhuma informação [Kantz and Schreiber 2003].

Mas será que há informação nas séries de erro? Através de análises utilizando uma função de auto-correlação e experimentos feitos em torno das séries de erro foi constatado que existem padrões relevantes nesses conjuntos de dados, que os distinguem de uma distribuição do tipo ruído branco. Então como utilizar essas informações contidas nas séries de erro para melhorar o desempenho de previsão? Essas informações relevantes podem ser agregadas à previsão utilizando um procedimento inspirado numa abordagem extremamente conhecida nos diversos ramos da ciência como física, matemática e química, a Teoria da Perturbação [Sakurai 1994].

A Teoria da Perturbação pode ser definida como um conjunto de técnicas matemáticas utilizado para descrever sistemas complexos em termos de outros sistemas mais simples. Esses sistemas mais simples compõem uma expansão matemática, onde cada termo acrescentado à essa expansão introduz um fator de correção. Cada vez que um novo fator de correção for adicionado à expansão, a solução atual irá convergir para a solução real do problema.

O problema de previsão de séries temporais pode ser enfocado como uma expansão perturbativa. Seguindo tal raciocínio, pode-se considerar uma série matemática assintoticamente aproximativa, onde a previsão da própria série temporal é o primeiro termo aproximativo, e as previsões dos erros seguintes gerariam as perturbações (fatores de correção) que serão agregadas ao termo inicial, aproximando-se cada vez mais a uma previsão ideal da série temporal.

Utilizando esse conceito, foi gerada uma nova abordagem perturbativa, o Método P-TAEF (*Perturbative Time-delay Added Evolutionary Forecasting*), que prevê a série de resíduos, gerando novos termos de correção para serem adicionados à previsão final. Desse modo, é esperado que o desempenho de previsão do método através do acréscimo dessas sucessivas correções seja bem superior aos métodos convencionais de inteligência artificial [Leung et al. 2003, de Mattos Neto et al. 2007, Ferreira et al. 2008].

Neste artigo, na Seção 2 a Teoria da Perturbação será brevemente conceituada, de tal forma que se possa entender a idéia do método. Na Seção 3 é apresentada uma nova abordagem para o problema de previsão de séries temporais que consiste num modelo perturbativo, baseado no Método TAEF [Ferreira et al. 2008], que combina um Algoritmo Genético [Leung et al. 2003] modificado e uma Rede Neural Artificial (RNA) do tipo MLP (*Multilayer Perceptron*) [Hakykin 2002]. Para testar o desempenho de previsão do Método P-TAEF foi utilizado um conjunto de cinco medidas de desempenho descritas na Seção 4. Os resultados obtidos pelo método P-TAEF, usado para prever três séries com diferentes características: uma série artificial (Mapa de Hénon), uma série de fenômeno da natureza (série das Manchas Solares) e uma série econômico financeira (Índice de Dow Jones Industrial Average (DJIA)) estão na Seção 5.

2. Introdução a Teoria da Perturbação

A Teoria da Perturbação é, basicamente, um processo recursivo aproximativo, compreendendo de uma expansão em série, onde cada termo adicionado a série corrige a atual solução para a solução real ou exata.

A idéia consiste em iniciar a resolução do problema com um sistema simplificado e depois adicionar gradualmente novos termos (perturbações), que geram pequenas

alterações ao sistema. Se essas alterações não forem demasiadamente grande, as diversas características físicas do sistema perturbado poderão ser gerados de forma contínua a partir do sistema simples. Desta forma, pode-se estudar um sistema complexo através de sistemas simplificados.

Uma solução alcançada através da Teoria da Perturbação é uma expressão composta por uma expansão matemática, sendo os termos dessa seqüência desvios ou perturbações que agregam informação à solução inicial. A inserção desses termos à solução primária (principal) fazem com que, a cada perturbação, a solução encontrada asintote a solução ótima. A ordem do termo é inversamente proporcional à sua contribuição para a resposta definitiva, sendo o termo de menor ordem o mais importante. Por exemplo, um dado problema tem uma solução final A . Numa primeira aproximação, $A \cong A_0$, aplicando algum procedimento sistemático, novos termos são adicionados a solução,

$$A = \epsilon^0 A_0 + \epsilon^1 A_1 + \epsilon^2 A_2 + \dots + \epsilon^n A_n \quad (1)$$

onde A_1, A_2, \dots, A_n são termos de alta ordem que e o ϵ é um coeficiente real ($\epsilon < 1$).

Embora, essa teoria seja extremamente divulgada no meio científico, de forma geral, esta não é combinada aos métodos inteligentes para a previsão de séries temporais. Na literatura, de forma geral, o uso do conceito de previsão do erro residual é pouco abordado pelos métodos da IA.

3. Método Proposto: P-TAEF

Inspirado no procedimento da teoria da perturbação para resolução de problemas, pode-se abordar o problema de previsão como uma expansão em série. A resposta de um modelo de previsão, no caso uma RNA, pode ser considerada como o primeiro termo da série, ou seja, uma primeira aproximação da decomposição de uma função, desse modo a primeira componente, ou a componente zero de uma expansão perturbativa.

Espera-se que a soma dessas perturbações à componente principal venha agregar mais informação à previsão, de tal modo a melhorar o resultado final. Então, se a saída da rede neural for observada como uma primeira aproximação para previsão, os erros obtidos serão altos, quando comparados aos erros de uma resposta perturbada.

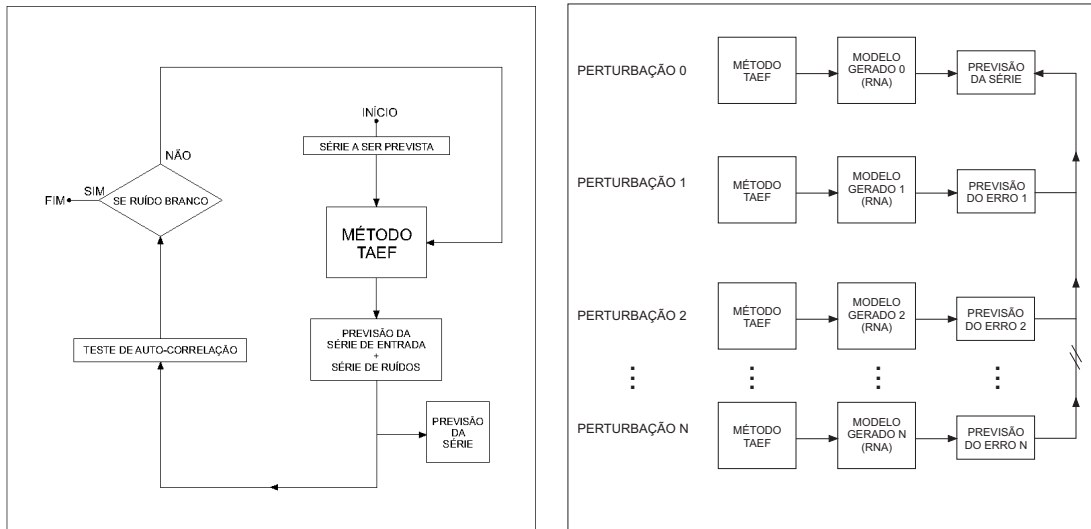
Desse modo, a cada nova perturbação ou a cada novo termo acrescentado à série, a aproximação seria mais precisa, e o resultado seria mais próximo da função geradora. Basicamente, o esquema que será usado é compor a previsão através de uma série (somatório de termos matemáticos), sendo esta formada pela primeira saída do método de previsão utilizado (perturbação de ordem 0), mais a soma da previsão dos erros (perturbação de ordem 1), mais a soma da previsão dos erros do erro (perturbação de ordem 2), e assim por diante, até a perturbação de ordem n . Todos os erros são calculados com base na previsão até o termo anterior da expansão, subtraindo-se a saída desejada da saída prevista (*target - output*), criando uma nova série de erros residuais a cada perturbação, que será utilizada novamente na próxima etapa como entrada para o método.

Uma vez conhecendo-se o método TAEF [Ferreira et al. 2008] e a Teoria da Perturbação [Sakurai 1994], a idéia básica é desenvolver um método recursivo, o método P-TAEF (*Perturbative Time-lag Added Evolutionary Forecasting Method*). A idéia recursiva proposta de previsão é baseada na Equação 2.

$$X = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n + erro \quad (2)$$

em que P_0 é a previsão da série de interesse, $P_1, P_2 \dots P_n$ são as previsões dos resíduos, $erro$ é o ruído branco e X é a soma de todas as perturbações.

Na etapa inicial da previsão (perturbação zero), quando o método prevê a série original, a série de resíduos é calculada, sendo realizado um teste de auto-correlação para verificar a presença ou ausência de ruído branco. Se a série de resíduos for caracterizada como ruído branco, teoricamente o método não terá capacidade de prevê-la. O esquema do Método P-TAEF está descrito na Figura 1a.



(a) Esquema de funcionamento do Método P-TAEF.

(b) Ilustração da geração dos diversos modelos (RNAs) e o funcionamento perturbativo do método resultando na previsão final.

Figura 1. Método P-TAEF

Na Figura 1b é observado que os modelos gerados sucessivamente pelo método P-TAEF são independentes, onde em cada perturbação um modelo de RNA distinto é criado. E a cada perturbação é realizada a execução do Método TAEF [Ferreira et al. 2008], que ajusta os seguintes parâmetros:

- **Os retardos temporais relevantes**, ou *lags*, sendo inicialmente definida uma quantidade máxima de retardos temporais (R_{max}) para a seleção do algoritmo genético presente no Método TAEF;
- **A quantidade de neurônios nas camadas intermediárias**, onde a quantidade máxima permitida (Nh_{max}) é estabelecida inicialmente pelo usuário. O algoritmo genético irá escolher para cada indivíduo a quantidade de neurônios das camadas intermediárias contida no intervalo $[1, Nh_{max}]$;
- **O algoritmo de treinamento da RNA**, onde são pré-estabelecidos quatro diferentes algoritmos: RPROP [Reidmiller and Braun 1993], Levenberg-Marquardt [Mor 1977], método do Gradiente Conjugado Escalado [Moller 1993], e o algoritmo Um Passo Secante [Battiti 1992]. Todos estes baseados no método do gradiente descendente.

Portanto, o método P-TAEF 1b gera perturbações, que são modelos para cada uma das séries geradas.

Os indivíduos do Método P-TAEF são avaliados por uma função de *fitness* definida por,

$$fitness = \frac{POCID}{1 + MSE + MAPE + NMSE + ARV} \quad (3)$$

onde *MSE*, *MAPE*, *NMSE*, *POCID* e *ARV* são devidamente explicadas na seção 4 e são usadas para avaliar o desempenho das RNAs encontradas. Esta função de *fitness* foi projetada com o intuito de agregar várias informações relevantes para a análise de séries temporais. Contudo, tais informações são capturadas a partir das medidas estatísticas citadas, que contribuem de formas distintas para a função de *fitness*. Por esta razão alguns estudos mais sofisticados seriam necessários para a completa caracterização do comportamento desta função. O objetivo aqui é apenas gerar uma função de *fitness* que tenha capacidade de obter informação não representada pelo erro MSE, erro este comumente utilizado de forma isolada para a determinação da qualidade dos modelos de previsão.

Cinco condições de parada foram estabelecidas para o Método P-TAEF:

1. Verificação da ocorrência de dois acréscimos no valor do *fitness* em duas perturbações consecutivas;
2. Verificação de quatro flutuações seguidas no valor do *fitness* sob um determinado patamar;
3. Progresso mínimo no desempenho de previsão, relacionado a pequena melhoria de desempenho com o passar das perturbações. Ocorrendo três melhorias consecutivas pouco significativas ($\leq 5\%$) em mais da metade das medidas de desempenho o experimento é finalizado;
4. Baixo ganho em relação ao método sem perturbação, havendo uma variação de ganho a cada perturbação no intervalo de (3% a 15%);
5. Quantidade mínima de pontos disponíveis da série temporal.

A escolha do melhor resultado, utilizando o método P-TAEF foi feita observando ganho em relação a perturbação 0 no conjunto de teste. Obedecendo sempre os critérios de parada estabelecidos na Seção 3.

4. Medidas de Desempenho para Previsão

Na previsão de séries temporais, a medida de desempenho mais intuitiva é o próprio resultado da previsão, descrita na Equação 4.

$$e_t = (target - output) \quad (4)$$

Para analisar o desempenho da previsão são usadas algumas medidas muito comuns na literatura [Ferreira et al. 2008], como:

- **Erro Médio Quadrático**

$$MSE = \frac{\sum e_t^2}{N} \quad (5)$$

- **Erro Médio Absoluto Percentual**

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum \left| \frac{e_t}{X_t} \right| \quad (6)$$

- **A Estatística U de Theil**

$$UdeTheil = \frac{\sum (target_t - output_t)^2}{\sum (target_t - output_{t-1})^2} \quad (7)$$

- **Prediction Of Change In Direction**

$$POCID = 100 \frac{\sum_{\mu=1}^N D_{\mu}}{N} \quad (8)$$

onde,

$$D_{\mu} = \begin{cases} 1, & \text{Se}(target_{\mu} - target_{\mu-1})(output_{\mu} - output_{\mu-1}) > 0 \\ 2, & \text{0,caso contrário} \end{cases} \quad (9)$$

- **Average Relative Average**

$$ARV = \frac{\sum_{i=1}^N (output_i - target_i)^2}{\sum_{i=1}^N (output_i - \overline{target_i})^2} \quad (10)$$

onde e_t é o erro de previsão definido pela Equação 4, X_t é o valor atual da série, e N é a quantidade de padrões analisados, $target_{\mu} - target_{\mu-1}$ e $output_{\mu} - output_{\mu-1}$ são as diferenças entre os valores reais e entre as saídas do modelo nos instantes i e $i - 1$ e \overline{target} é a média da série.

5. Simulações e Resultados

Os experimentos realizados utilizaram três séries: uma série artificial do mapa de Hénon, uma série natural do Brilho da Estrela e uma série econômico financeira (série do Índice Nasdaq). Todas as séries foram normalizadas no intervalo [0,1] e divididas em três conjuntos: treinamento (50%), validação (25%) e teste (25%). No caso do Método P-TAEF, a série foi dividida desse modo para cada perturbação.

Os resultados foram comparados com outros trabalhos consolidados na literatura [de Mattos Neto et al. 2007, Ferreira et al. 2008] obtidos com as redes neurais do tipo *Multilayer Perceptron* e com um sistema híbrido (SHI) composto por RNA e um algoritmo de PSO (*Particle Swarm Optimization*).

Foram utilizadas RNAs MLP de três camadas com arquitetura (X-Y-1) [Ferreira et al. 2008]. Para definir o número inicial de neurônios na camada de entrada (X) foram utilizados o método δ -Test [Savit and Green 1991] e os gráficos provenientes do *lagplot*. A quantidade de neurônios intermediários (Y) foi variada entre 1, 5 e 10 nodos. Na camada de saída foi fixado um neurônio (previsão de um passo). O algoritmo de treinamento utilizado foi o Levenberg-Marquadt [Mor 1977]. As condições de parada foram: quantidade máxima de épocas no treinamento (500), desempenho no progresso de treinamento de no mínimo (10^{-6}) e erro de validação com variação de 5%.

No SHI composto por PSO e RNAs MLP, foi utilizada uma população de 10 partículas, sendo cada uma RNA de arquitetura 10-10-1, e os seguintes parâmetros: 1000

iterações, coeficientes de aceleração (c_1 e c_2) estabelecidos em 2.05, e o coeficiente de inércia (w) inicial em 0.9. A velocidade máxima foi fixada em 2.048 e os termos r_1 e r_2 são números aleatórios entre [0,1]. A cada iteração o pior indivíduo da população é treinado por um algoritmo baseado em gradiente descendente (Levenberg-Marquadt, RPROP, Gradiente Conjugado ou Um Passo Secante) por um período de 1000 épocas.

O método P-TAEF obteve um grau de acerto tão alto, que nos resultados não se pode distinguir a série real (linha tracejada com bolinha) da série prevista (linha cheia).

5.1. Série do Mapa de Hénon

A série de Hénon [Hénon 1976] utilizada é um mapa caótico em duas dimensões proposto pelo astrônomo francês Michel Hénon [Hénon 1976] em 1976. A série aqui proposta foi montada com os coeficientes $a = 1.4$ e $b = 0.3$ (sem a inclusão de ruído), contendo 10000 pontos.

As análises são feitas baseadas no ganho em relação à perturbação anterior e em relação a previsão da própria série pelo Método TAEF (perturbação zero). Foram utilizadas sete perturbações no total e o critério de parada estabelecido foi baixo ganho em relação ao método sem perturbação, havendo uma variação pequena de ganho a cada perturbação.

Na Figura 2 é apresentada a comparação entre a série real (linha tracejada com bolinha) e a previsão da série (linha cheia). Na Tabela 1 os resultados comparativos com as três técnicas utilizadas. O Método P-TAEF utilizando sete perturbações obteve um desempenho similar aos outros métodos.

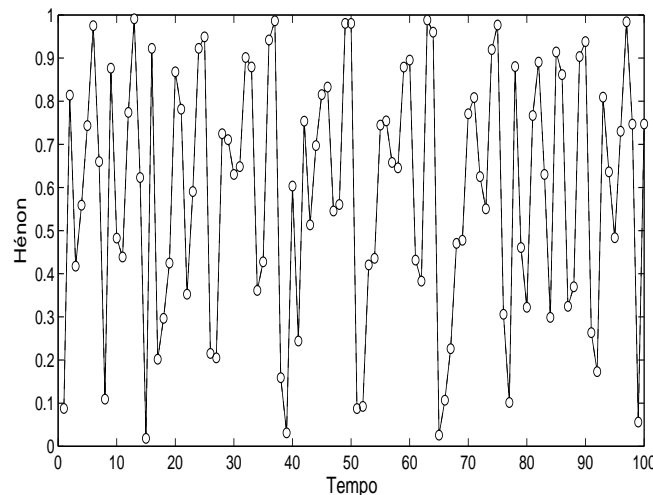


Figura 2. Previsão do modelo (Perturbação 7) para o conjunto de teste da série Hénon.

5.2. Série das Manchas Solares

As manchas solares são regiões escuras na superfície solar que foram observadas primeiramente por Galileo Galilei na Europa. A série escolhida são as totalizações anuais entre os anos de 1700 e 1988, gerando 289 pontos.

Tabela 1. Resultados para a série de Hénon.

Medidas	RNA	PSO+RNA	TAEF	P-TAEF(Pert.7)
MSE	$4.0800 \cdot 10^{-9}$	$1.4600 \cdot 10^{-11}$	$3.1700 \cdot 10^{-11}$	$2.2600 \cdot 10^{-12}$
POCID (%)	100.00	99.96	100.00	100.00
U de Theil	$3.9000 \cdot 10^{-11}$	$9.1600 \cdot 10^{-11}$	$1.9800 \cdot 10^{-10}$	$2.0700 \cdot 10^{-13}$
MAPE (%)	$1.0300 \cdot 10^{-8}$	0.0172	0.0061	0.0020
ARV	$7.8000 \cdot 10^{-11}$	$1.8300 \cdot 10^{-10}$	$1.3900 \cdot 10^{-10}$	$2.8300 \cdot 10^{-11}$
Fitness	100.00	98.27	99.39	99.75

Para a série de manchas solares foram utilizados um total de oito perturbações. Sendo as simulações finalizadas por falta de dados para treinamento.

Na Figura 3 é apresentada a comparação entre a série real (linha tracejada com bolinha) e a previsão da série (linha cheia) e na Tabela 2 pode ser vista a comparação entre o método proposto e as outras técnicas.

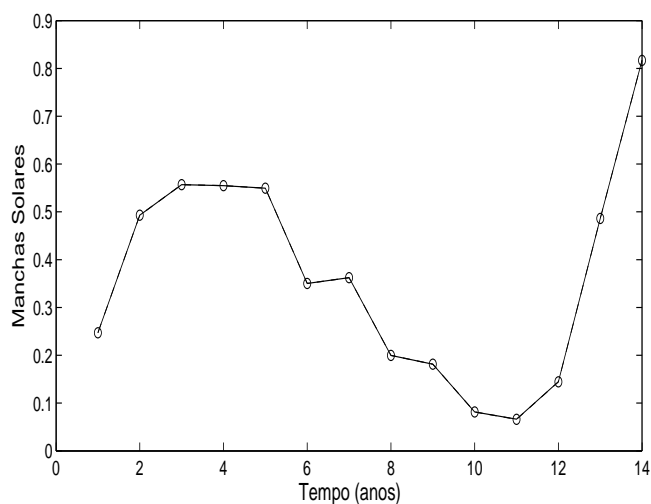


Figura 3. Previsão do modelo (Perturbação 8) para o conjunto de teste da série das Manchas Solares.

Tabela 2. Resultados para a série das Manchas Solares.

Medidas	RNA	PSO+RNA	TAEF	P-TAEF(Pert.8)
MSE	0.9205	$9.5536 \cdot 10^{-3}$	$8.6000 \cdot 10^{-3}$	$1.2000 \cdot 10^{-8}$
POCID (%)	90.00	91.30	94.29	100.00
U de Theil	0.3443	0.3237	0.3218	$1.2900 \cdot 10^{-6}$
MAPE (%)	44.10	31.95	34.03	0.02
ARV	0.1418	0.1432	0.1698	$2.6500 \cdot 10^{-7}$
Fitness	1.94	2.73	2.65	98.12

5.3. Série do Índice Nasdaq

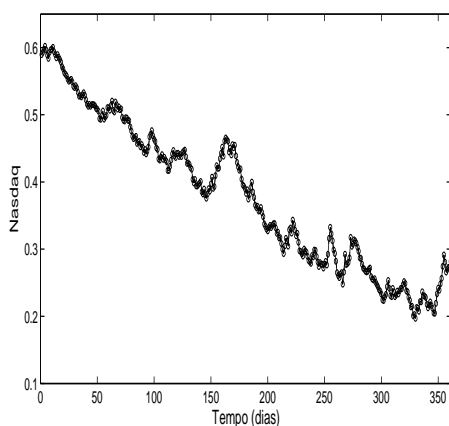
A série do índice Nasdaq utilizada nos experimentos consiste em observações diárias do período de 2 de fevereiro de 1971 até 18 de junho de 2004, totalizando 8248 pontos.

Para a série do Índice Nasdaq foram utilizadas cinco perturbações. Através da análise da evolução dos valores através das perturbações, o melhor resultado foi obtido quando a previsão da série foi somada às duas primeiras perturbações. O critério de parada foi a piora dos resultados em duas perturbações consecutivas.

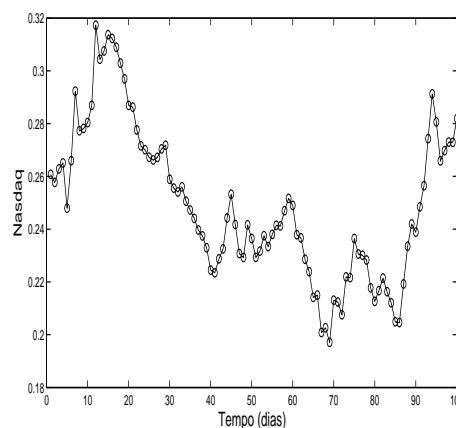
Tabela 3. Resultados para a série Nasdaq.

Medidas	RNA	PSO+RNA	TAEF	P-TAEF(Pert.2)
MSE	0.0020	$1.8700 \cdot 10^{-5}$	$3.0000 \cdot 10^{-6}$	$2.9500 \cdot 10^{-9}$
POCID (%)	53.06	53.32	89.63	99.72
U de Theil	1.1730	1.0000	0.1720	$2.3000 \cdot 10^{-5}$
MAPE (%)	0.27	0.39	0.16	0.01
ARV	0.0035	$3.0000 \cdot 10^{-3}$	0.0005	$2.3500 \cdot 10^{-7}$
Fitness	21.67	22.28	67.23	98.45

Na Figura 4 pode ser vista a previsão com duas perturbações (linha cheia) em relação à série de Nasdaq (linha tracejada com bolinha). Os melhores resultados obtidos pelas quatro técnicas utilizadas são mostrados na Tabela 3. Nesta tabela pode ser visualizado o desempenho muito superior do Método P-TAEF utilizando a teoria da perturbação até a segunda ordem. O Método P-TAEF obteve um MSE com três ordens de grandeza menor que o MSE do método sem perturbação, um MAPE com uma ordem de grandeza menor, um U de Theil com quatro ordens de grandeza menor e o ARV com três ordens menor. Portanto para a série do Índice Nasdaq, o método perturbativo com duas perturbações obteve um resultado superior à previsão original da série pelos métodos convencionais.



(a) Previsão do modelo (Perturbação 2) para o conjunto de teste da série Nasdaq.



(b) Previsão do modelo (Perturbação 2) para os últimos 100 pontos do conjunto de teste da série Nasdaq.

Figura 4. Previsão do modelo para a série de Nasdaq

6. Conclusões

Os resultados obtidos pelo método TAEF perturbativo (P-TAEF) são muito superiores aos valores encontrados na literatura especializada em previsão de séries temporais. Esse desempenho é a união de um método inteligente que já tinha mostrado um grande poder de previsão [Ferreira et al. 2008] com um conceito teórico físico, já bastante conhecido. Porém, essa nova metodologia, necessita de uma maior análise teórica para a determinação e caracterização de sua real aplicabilidade.

O método P-TAEF se apresenta como uma proposta viável para a resolução do problema de previsão de séries temporais. Tanto para pesquisas científicas como para aplicações práticas, o método pode ser usado, visto que o ganho na resposta é extremamente satisfatório resultando numa qualidade de previsão bem superior à encontrada na literatura [Ferreira et al. 2008].

Referências

- Battiti, R. (1992). “One step secant conjugate gradient”. *Neural Computation*, 4:141–166.
- de Mattos Neto, P. S. G., Petry, G. G., Andrade, R. A., Ferreira, T. A. E., and Vasconcelos, G. C. (2007). “Hybrid swarm system for time series forecasting”. In *Anais do VI Encontro Nacional de Inteligência Artificial - VI ENIA*, Rio de Janeiro - RJ. Sociedade Brasileira de Redes Neurais.
- Ferreira, T. A. E., Vasconcelos, G. C., and Adeodato, P. J. L. (2008). “A new intelligent system methodology for time series forecasting with artificial neural networks”. *Neural Processing Letters*, 28:113–129.
- Hakykin, S. (2002). *Redes Neurais - Princípios e Prática*. Bookman, Porto Alegre - Brasil, 2a edition.
- Hénon, M. (1976). “A two-dimensional mapping with a stranger attractor”. *Communications in Mathematical Physics*, 50(1):69–77.
- Kantz, H. and Schreiber, T. (2003). *Nonlinear Time Series analysis*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, second edition.
- Leung, F. H. F., Lam, H. K., Ling, S. H., and Tam, P. K. S. (2003). “Tuning of the structure and parametrs of the neural network using an improved genetic algorithm”. *IEEE Transaction on Neural Networks*, 14(1):79–88.
- Moller, M. F. (1993). “A scaled conjugate gradient algorithm for fast supervised learning”. *Neural Networks*, 6:525–533.
- Mor, J. J. (1977). “The levenberg-marquardt algorithm: Implementation and theory”. In Watson, G. A., editor, *Numerical Analysis*, volume 630 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 105–116, Berlin. Springer-Verlag.
- Reidmiller, M. and Braun, H. (1993). “A direct adaptive method for faster backpropagation learnng: The rprop algorithm”. In *Proceedings of the IEEE Int. Conf. on Neural Networks (ICNN)*, pages 586–591, San Francisco.
- Sakurai, J. J. (1994). *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, Massachusetts.
- Savit, R. and Green, M. (1991). “Time series and dependent variables”. *Physica D*, 50:95–116.