# Formas Normais Primárias Aplicadas à Fusão de Crenças

**Jerusa Marchi**[1], **Guilherme Bittencourt**[1,*], **Laurent Perrussel**[2]

[1]Departamento de Automação e Sistemas
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)
Florianópolis – SC – Brazil

[2]Institute de Recheche en Informatique de Toulouse
Université Toulouse I
Toulouse – France

jerusa@das.ufsc.br, laurent.perrussel@univ-tlse1.fr

***Abstract.*** *In knowledge based systems, belief merging aims to aggregate possible conflicting pieces of information that arrive from different sources. The quality of the resulting set is usually considered in terms of a closeness criterion between the initial belief set and an integrity constraint with respect to the aim of the merging procedure. The notion of distance between belief sets is thus a crucial issue when we face the merging problem. The aim of this paper is twofold: introduce a syntactical way to calculate distances and propose a new distance that considers the importance of each proposicional symbol in the belief set.*

***Resumo.*** *Em sistemas baseados em conhecimento, processos de fusão de crenças tem por objetivo agregar informações, possivelmente contraditórias, vindas de fontes variadas. A base resultante é dada pela aplicação de um critério de proximidade entre as bases de crenças que representam a informação a ser agregada e a base que contém as restrições de integridade, observando o objetivo do procedimento de fusão. A noção de distância entre bases de crenças é, então, uma questão importante no problema da fusão de crenças. O objetivo deste artigo é, inicialmente, propor uma forma sintática de calcular distâncias entre bases de crenças e, em seguida, apresentar uma nova medida de distância que considera a importância de cada símbolo proposicional na base de crenças.*

## 1. Introdução

Processos de fusão de crenças tem por objetivo agregar diversas bases de conhecimento (ou crenças) em uma única base [Liberatore and Schaerf 1998]. Tais processos são aplicados à sistemas baseados em conhecimento, onde o agente cognitivo recebe informações de fontes variadas e possivelmente contraditórias, como outros agentes, sensores ou "estados mentais" de um mesmo agente.

Visando manter a consistência da base de crenças com a perda mínima de informação, um processo de fusão de crenças baseia-se em três componentes principais: uma medida de distância entre modelos, uma função de ordenação e um procedimento para seleção dos modelos que irão compor a base resultante [Konieczny and Pérez 2002].

Em geral, a medida de distância utilizada é a distância de Hamming entre modelos, considerando um símbolo proposicional isolado como unidade mínima de conhecimento

[*] In memorian.

[Dalal 1988]. Contudo, esta consideração pode não ser mínima se o símbolo alterado ocorrer frequentemente nas proposições das bases de crenças (modificá-lo significa modificar todas as proposições que o contém). Ou seja, o critério extra-lógico de distância utilizado até o momento não leva em consideração a estrutura da base de crenças que descreve o contexto mais amplo no qual os símbolos proposicionais estão inseridos.

Distingue-se então dois problemas: o primeiro, o fato de que o processo de fusão de crenças é caracterizado como uma operação sobre modelos; e o segundo, o fato de que a métrica até então adotada buscando satisfazer o princípio da mudança mínima pode promover mudanças significativas na base.

Este artigo aborda estes dois problemas, apresentando uma caracterização sintática do processo de fusão de crenças onde as bases de crenças são representadas por seus conjuntos de implicantes primários. Em seguida, introduz-se uma nova medida de distância baseada nas representações em implicantes e implicados primários. Estas representações relacionam os símbolos proposicionais em termos de modelos (implicantes primários) e em termos de estrutura (implicados primários), o que possibilita a contextualização dos símbolos proposicionais dentro da base, permitindo a introdução de uma nova unidade mínima de mudança.

O artigo está organizado como segue: na seção 2 são introduzidos os conceitos utilizados e o formalismo de representação adotado. A seção 3 define fusão de crenças, apresentando os postulados propostos por Konieczny e Péres [Konieczny and Pérez 2002], e os operadores de arbitração [Liberatore and Schaerf 1998] e de maioria [Lin and Mendelzon 1999]. A seção 4 introduz a caracterização sintática do processo de fusão baseada na representação em implicantes primários. Na seção 5, uma nova unidade mínima de mudança é introduzida. A seção 6 apresenta algumas considerações finais e perspectivas de trabalhos futuros.

## 2. Preliminares

Seja $P$ um conjunto finito de símbolos proposicionais, tal que $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Seja $\{L_1, \ldots, L_{2n}\}$ o conjunto de literais associados onde $L_i = p_j$ ou $L_i = \neg p_j$. Uma *cláusula* é uma *disjunção* de literais: $C = L1 \vee \cdots \vee L_{k_C}$. Um *termo*, é uma *conjunção* de literais: $D = L_1 \wedge \cdots \wedge L_{k_D}$. O valor negado de um literal $L$ é notado $\overline{L}$: se $L = p$ então $\overline{L} = \neg p$. Nota-se $\overline{D}$ a negação do termo $D$, por exemplo, se $D = p_1 \wedge \neg p_2$ então $\overline{D} = \neg p_1 \wedge p_2$. A subtração de dois termos $D$ e $D'$ é notada $D - D'$ e resulta nos literais de $D$ que não possuem correspondência com os literais de $D'$, por exemplo, se $D = p_1 \wedge \neg p_2$ e $D' = p_1 \wedge p_2$, $D - D' = \{\neg p_2\}$.

Dada a linguagem em lógica proposicional $\mathcal{L}(P)$ e uma *fórmula* $\psi \in \mathcal{L}(P)$, $\psi$ pode ser convertida em uma *forma normal conjuntiva (FNC)*, onde $FNC_\psi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$, ou em uma *forma normal disjuntiva (FND)*, onde $FND_\psi = D_1 \vee \cdots \vee D_w$, tal que $\psi \equiv FNC_\psi \equiv FND_\psi$.

Uma cláusula $C$ é um *implicado* de uma fórmula $\psi$ sse $\psi \models C$, e é um *implicado primário* sse para todo implicado $C'$ de $\psi$ tal que $C' \models C$, tem-se $C \models C'$. Define-se $PI_\psi$ como uma conjunção de implicados primários de $\psi$ tal que $\psi \equiv PI_\psi$. Um termo $D$ é um *implicante* de uma fórmula $\psi$ sse $D \models \psi$, e é um *implicante primário* sse para todos os implicantes $D'$ de $\psi$ tal que $D \models D'$, tem-se $D' \models D$. Define-se $IP_\psi$ como uma disjunção de implicantes primários de $\psi$ tal que $\psi \equiv IP_\psi$. Em lógica proposicional, implicantes e implicados primários são noções duais e um mesmo algoritmo [Bittencourt et al. 2003] pode ser utilizado para calcular ambas as formas.

Alternativamente, implicados e implicantes primários podem ser definidos como casos especiais das formas normais conjuntivas e disjuntivas, que consistem no menor conjunto de cláusulas ou termos fechados para inferência, sem cláusulas ou termos subsumidos e não contendo um literal e sua negação. Na sequência, cláusulas e termos são vistos como conjuntos.

Define-se $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ como um conjunto finito de fórmulas, onde cada fórmula $\psi_i$ representa as crenças vindas da fonte $i$. Nota-se $\bigwedge \Psi$, a conjunção de todas as fórmulas $\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n$; $\Psi_1 \sqcup \Psi_2$, a união dos conjuntos $\Psi_1$ e $\Psi_2$; e $\Delta_\mu(\Psi)$, a base resultante do processo de fusão.

Uma interpretação é uma função de $P$ para $\mathbb{B} = \{verdadeiro, falso\}$. Seja $\mathcal{W}$ o conjunto de todas as possíveis interpretações. Uma interpretação $w$ é um modelo de uma fórmula $\psi$ ($w \models \psi$) sse $\psi$ é verdadeiro na interpretação $w$. Para qualquer fórmula $\psi$, $[\![\psi]\!]$ denota o conjunto de modelos $\psi$.

### 2.1. Notação Quantum

Formas normais conjuntivas e disjuntivas e implicantes e implicados primários podem ter seus literais correlacionados através da *notação quantum* [Bittencourt 1998].

Dada uma fórmula $\psi$, representada por uma forma normal conjuntiva $FNC_\psi$ e por uma forma normal disjuntiva $FND_\psi$, define-se um *quantum conjuntivo*, como um par $(L, F_c)$, onde $L$ é um literal que está em $\psi$ e $F_c \subseteq FNC_\psi$ é o seu conjunto de *coordenadas conjuntivas* que contém o subconjunto de cláusulas em $FNC_\psi$ onde o literal $L$ ocorre. De forma dual, define-se um *quantum disjuntivo* como um par $(L, F_d)$, onde $L$ é um literal que está em $\psi$ e $F_d \subseteq FND_\psi$ é um conjunto de *coordenadas disjuntivas* que contém o subconjunto de termos em $FND_\psi$ onde o literal $L$ ocorre. Um quantum é notado $L^F$. O nome *quantum* sugere que a menor unidade de interesse não é o literal isolado, mas o literal e seu contexto na fórmula em que ocorre. Uma noção importante introduzida pela notação quantum é a noção de coordenada exclusiva. As coordenadas exclusivas associadas a um literal representam as cláusulas ou termos que aquele literal suporta sozinho ao considerar a cláusula ou termo ao qual pertence.

O exemplo a seguir busca ilustrar os conceitos de quantum e coordenadas exclusivas.

**Exemplo 1** *Considere a seguinte fórmula $\psi$, representada em forma normal conjuntiva $FNC_\psi$. As cláusulas são numeradas para facilitar a visualização da notação quantum:*

$$\begin{array}{ll}
1 : \neg p_3 \vee \neg p_2 \vee p_1 & 4 : \neg p_3 \vee p_1 \vee p_4 \\
2 : \neg p_2 \vee p_4 \vee p_3 & 5 : \neg p_4 \vee \neg p_3 \vee \neg p_2 \\
3 : \neg p_2 \vee \neg p_1 & 6 : \neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3 \vee p_4
\end{array}$$

*Aplicando o algoritmo de transformação dual sobre a $FNC_\psi$ obtém-se o conjunto de implicantes primários $IP_\psi$ em notação quantum. As coordenadas associadas a cada literal indicam as cláusulas em $FNC_\psi$ que o contém:*

$$\begin{array}{l}
1 : \neg p_3^{\{1,4,5,6\}} \wedge \neg p_2^{\{1,2,3,5\}} \\
2 : \neg p_2^{\{1,2,3,5\}} \wedge p_4^{\{2,4,6\}} \\
3 : \neg p_3^{\{1,4,5,6\}} \wedge \neg p_1^{\{3,6\}} \wedge p_4^{\{2,4,6\}}
\end{array}$$

*Uma nova execução do algoritmo de transformação dual,*[1] *tendo como entrada $IP_\psi$, de-*

[1]Esta segunda aplicação não é, de fato, necessária, pois uma vez conhecido o conjunto de implicantes primários, pode-se fazer uso de algoritmos polinomiais para o cálculo dos implicados primários [Darwiche and Marquis 2001].

*termina o conjunto de implicados primários $PI_\psi$. O par $(PI_\psi, IP_\psi)$ correspondente à fórmula $\psi$ é dado por:*

| $PI_\psi$ | $IP_\psi$ |
|---|---|
| $1 : \neg p_3^{\{1,\boxed{3}\}} \vee \neg p_2^{\{1,\boxed{2}\}}$ | $1 : \neg p_3^{\{1,\boxed{2}\}} \wedge \neg p_2^{\{1,\boxed{3,4}\}}$ |
| $2 : \neg p_3^{\{\boxed{1},3\}} \vee p_4^{\{\boxed{2},3\}}$ | $2 : \neg p_2^{\{\boxed{1,3},4\}} \wedge p_4^{\{\boxed{2},4\}}$ |
| $3 : \neg p_2^{\{\boxed{1,2}\}} \vee \neg p_1^{\{\boxed{3}\}}$ | $3 : \neg p_3^{\{\boxed{1},2\}} \wedge \neg p_1^{\{\boxed{3}\}} \wedge p_4^{\{2,\boxed{4}\}}$ |
| $4 : \neg p_2^{\{\boxed{1},2\}} \vee p_4^{\{2,\boxed{3}\}}$ | |

*As coordenadas ressaltadas por caixas indicam as coordenadas exclusivas de cada literal. Considere o literal $\neg p_3$ da cláusula número $1$ em $PI_\psi$. A coordenada que se refere ao termo $1$ de $IP_\psi$ não é exclusiva deste literal, pois é compartilhada com $\neg p_2$. Já a coordenada que se refere ao termo $3$ de $IP_\psi$ é exclusiva, pois não é compartilhada com nenhum outro literal nesta cláusula.*

## 3. Fusão de Crenças

A área de fusão de crenças surgiu como uma extensão da área de revisão de crenças, com os trabalhos de [Revesz 1993] e [Liberatore and Schaerf 1995]. Em trabalhos subsequentes, operadores de arbitração (do inglês, *arbitration*) [Liberatore and Schaerf 1998] e maioria (do inglês, *majority*) [Lin and Mendelzon 1999] são apresentados para agregar múltiplas bases de crenças considerando informações vindas de diversas fontes e, em [Konieczny and Pérez 2002], um arcabouço lógico para processos de fusão de crenças é introduzido. O arcabouço define semanticamente um processo de fusão de crenças como sendo a aplicação de um critério de ordenação entre as bases de crenças iniciais e a base que representa as restrições de integridade, selecionando os modelos das restrições de integridade mais próximos das bases iniciais, conforme o operador escolhido:

$$[\![\Delta_\mu(\Psi)]\!] = \text{Min}_{\leqslant_\Psi}([\![\mu]\!])$$

Para guiar a construção de operadores, o arcabouço fornece um conjunto de postulados, como segue:

**(IC0)** $\Delta_\mu(\Psi) \vdash \mu$
**(IC1)** Se $\mu$ é consistente, então $\Delta_\mu(\Psi)$ é consistente
**(IC2)** Se $\Psi$ é consistente com $\mu$, então $\Delta_\mu(\Psi) = \bigwedge \Psi \wedge \mu$
**(IC3)** Se $\Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$ e $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$ então $\Delta_{\mu_1}(\Psi_1) \leftrightarrow \Delta_{\mu_2}(\Psi_2)$
**(IC4)** Se $\psi \vdash \mu$ e $\psi' \vdash \mu$, então $\Delta_\mu(\psi \sqcup \psi') \wedge \psi \nvdash \bot \Rightarrow \Delta_\mu(\psi \sqcup \psi') \wedge \psi' \nvdash \bot$
**(IC5)** $\Delta_\mu(\Psi_1) \wedge \Delta_\mu(\Psi_2) \vdash \Delta_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$
**(IC6)** Se $\Delta_\mu(\Psi_1) \wedge \Delta_\mu(\Psi_2)$ é consistente, então $\Delta_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2) \vdash \Delta_\mu(\Psi_1) \wedge \Delta_\mu(\Psi_2)$
**(IC7)** $\Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2 \vdash \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$
**(IC8)** Se $\Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$ é consistente, então $\Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi) \vdash \Delta_{\mu_1}(\Psi)$

Os postulados descrevem, dentre outros, os princípios da irrelevância da sintaxe, da mudança mínima e da justiça. O princípio da justiça diz que um processo de fusão não deve preferir uma determinada base em detrimento às outras.

### 3.1. Operadores de Arbitração e Maioria

As definições dos operadores de *arbitração* [Revesz 1993, Liberatore and Schaerf 1998] e *maioria* [Lin and Mendelzon 1999] seguem a definição semântica de um processo de fusão, alterando o critério de ordenação aplicado, contudo para ambos, a distância entre modelos é dada pelos símbolos proposicionais em que os modelos diferem, conforme proposto por Dalal [Dalal 1988].

O operador de arbitração, notado por $\Delta^{Max}$ retém tanto quanto possível a informação contida nas bases iniciais, maximizando a satisfação individual. Assim, o cálculo da distância entre um modelo $w$ e as bases de crenças representadas por $\Psi$ é dado pela máxima distância calculada entre $w$ e as bases $\psi$ pertencentes a $\Psi$:

$$Dist_{Max}(w, \Psi) = Max_{\psi_i \in \Psi} \mid \text{DIST}(w, \psi_i) \mid$$

e a seguinte ordem de preferência é estabelecida: um modelo $w$ será preferido a um modelo $w'$ se e somente se a distância máxima de $w$ para o conjunto de bases $\Psi$ for menor que a distância máxima entre $w'$ e $\Psi$.

$$w \leqslant_{\Psi}^{Max} w' \text{ sse } Dist_{Max}(w, \Psi) \leq Dist_{Max}(w', \Psi)$$

O operador de maioria, notado por $\Delta^{\Sigma}$ mantém as crenças que são compartilhadas pela maioria do grupo, ou seja, este operador tenta maximizar a satisfação global. Assim, o cálculo da distância entre um modelo $w$ e as bases de crenças representadas por $\Psi$ é dado pelo somatório das distâncias calculadas entre $w$ e as bases $\psi$ pertencentes a $\Psi$:

$$Dist_{\Sigma}(w, \Psi) = \sum_{\psi_i \in \Psi} \mid \text{DIST}(w, \psi_i) \mid$$

desta forma, a seguinte ordem de preferência é estabelecida: um modelo $w$ será preferido a um modelo $w'$ se e somente se o somatório das distâncias calculadas entre $w$ e as bases de $\Psi$ for menor que o somatório das distâncias calculadas entre $w'$ e as bases de $\Psi$.

$$w \leqslant_{\Psi}^{\Sigma} w' \text{ sse } Dist_{\Sigma}(w, \Psi) \leq Dist_{\Sigma}(w', \Psi)$$

**Exemplo 2** *Considere a fusão das seguintes bases de crenças $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$, tais que $\psi_1 = \psi_2 = (p_1 \wedge p_2) \vee (p_2 \wedge p_3 \wedge p_4)$, $\psi_3 = (\neg p_3 \wedge p_4 \wedge \neg p_5)$. Considere ainda as seguintes restrições de integridade $\mu = (\neg p_1 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \wedge p_5) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_5)$. Após o cálculo dos modelos de $\mu$, $\psi_1$, $\psi_2$ e $\psi_3$, são calculadas as distâncias entre modelos. A tabela abaixo apresenta as distâncias mínimas calculadas entre os modelos das bases $\psi_1$, $\psi_2$ e $\psi_3$ e os modelos de $\mu$, bem como os valores calculados pela aplicação dos operadores de arbitração e maioria:*

| $w \in [\![\mu]\!]$ | $\psi_1$ | $\psi_2$ | $\psi_3$ | $Dist_{Max}(w, \Psi)$ | $Dist_{\Sigma}(w, \Psi)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 |
| $\{\neg p_1, \neg p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 6 |
| $\{\neg p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}$ | 2 | 2 | 1 | 2 | 5 |
| $\{p_1, \neg p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 |
| $\{p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |

*Aplicando as ordens de preferência estabelecidas para os operadores $\Delta^{Max}$ e $\Delta^{\Sigma}$, a fusão das bases resulta no seguinte modelo:*

$$[\![\Delta_{\mu}^{Max}(\Psi)]\!] = [\![\Delta_{\mu}^{\Sigma}(\Psi)]\!] = \{\{p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}\}$$

## 4. Caracterização Sintática do Processo de Fusão de Crenças

Baseando-se no fato de que cada implicante primário representa um conjunto de modelos, alterar um implicante primário significa alterar todos os modelos que este representa. Desta forma, pode-se executar o processo de fusão de crenças considerando os implicantes primários da base de crenças ao invés dos seus modelos.

O primeiro passo para a caracterização sintática do processo de fusão é a transformação das bases envolvidas para a forma de implicantes primários. Assim, as bases de crenças $\Psi = (\psi_1 \ldots \psi_n)$ e a base que representa as restrições de integridade $\mu$ são transformadas em seus respectivos conjuntos de implicantes primários $IP_\Psi = (IP_{\psi_1}, \ldots, IP_{\psi_n})$ e $IP_\mu$. Em seguida, calcula-se um conjunto de termos candidatos, onde cada termo $D_\mu$ em $IP_\mu$ é estendido com os literais não contraditórios dos termos das bases que compõem $IP_\Psi$:[2]

$$\Gamma = \{D \mid \ D = D_\mu \cup (D_\psi - \overline{D_\mu})\}$$

A distância entre termos é dada pelos literais contraditórios entre os termos de $IP_\psi$ e $IP_\mu$:

$$k(D_\psi, D_\mu) = D_\psi \cap \overline{D_\mu}$$

**Exemplo 3** *Considere a fusão das bases de crenças apresentada no exemplo 2, com as bases representadas por seus conjuntos de implicantes primários, tal que* $IP_\Psi = (IP_{\psi_1}, IP_{\psi_2}, IP_{\psi_3})$ *e* $IP_{\psi_1} = IP_{\psi_2} = (p_1 \wedge p_2) \vee (p_2 \wedge p_3 \wedge p_4)$, $IP_{\psi_3} = (\neg p_3 \wedge p_4 \wedge \neg p_5)$. *A base* $\mu$ *que representa o conjunto de restrições de integridade é dada por* $IP_\mu = (\neg p_1 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \wedge p_5) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_5)$. *A tabela abaixo apresenta os termos candidatos, bem como os conjuntos de literais contraditórios de cada termo e suas respectivas cardinalidades:*

| $D_\psi \in IP_\Psi$ | $D_\mu$ | $D \in \Gamma$ | $k(D_\psi, D_\mu)$ | $\mid k(D_\psi, D_\mu) \mid$ |
|---|---|---|---|---|
| $\{p_1, p_2\}$ | $\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{p_1\}$ | 1 |
| $\{p_2, p_3, p_4\}$ | $\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{p_3, p_4\}$ | 2 |
| $\{p_1, p_2\}$ | $\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$ | $\{p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_5\}$ | $\{p_2\}$ | 1 |
| $\{p_2, p_3, p_4\}$ | $\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$ | $\{\neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}$ | $\{p_2, p_3\}$ | 2 |
| $\{p_1, p_2\}$ | $\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{p_1\}$ | 1 |
| $\{p_2, p_3, p_4\}$ | $\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{p_3, p_4\}$ | 2 |
| $\{p_1, p_2\}$ | $\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$ | $\{p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_5\}$ | $\{p_2\}$ | 1 |
| $\{p_2, p_3, p_4\}$ | $\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$ | $\{\neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}$ | $\{p_2, p_3\}$ | 2 |
| $\{\neg p_3, p_4, \neg p_5\}$ | $\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{p_4, \neg p_5\}$ | 2 |
| $\{\neg p_3, p_4, \neg p_5\}$ | $\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$ | $\{\neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}$ | $\{\neg p_5\}$ | 1 |

O critério de ordenação total, seguindo a definição de minimalidade proposta por Dalal [Dalal 1988], é dado pela seguinte ordem de preferência sobre os termos do conjunto de termos candidatos: um termo $D$ será preferido a um termo $D'$ se e somente se o número de literais contraditórios de $D$ for inferior ao número de literais contraditórios de $D'$:

$$D \leqslant_\Gamma^T D' \text{ sse } \mid k(D_\psi, D_\mu) \mid \leq \mid k(D'_\psi, D'_\mu) \mid$$

Semanticamente, realizar um processo de fusão significa encontrar os modelos da base de restrições de integridade mais próximos aos modelos das bases de crenças. Por esta

[2]Para simplificar a notação, considera-se que $IP_\Psi = \bigvee IP_\psi$.

característica, a seleção dos termos que irão compor a nova base é feita observando cada termo em $IP_\mu$. Então, para cada termo $D_\mu$ e para cada base $IP_\psi$ de $IP_\Psi$ são escolhidas as distâncias mínimas, segundo o critério de ordenação total. Então, a distância entre um termo $D_\mu$ e a base de crenças $IP_\psi$ é dada pelo mínimo valor de $k(D_\psi, D_\mu)$:

$$d(D_\mu, IP_\psi) = \min(\{|k(D_\psi, D_\mu)| \mid D_\psi \in IP_\psi\})$$

A definição de operadores sintáticos de arbitração e maioria é feita através da caracterização sintática dos critérios de distância e ordenação. Assim um operador sintático de arbitração, notado $FND_{\Delta^{Max}}$ baseia-se no seguinte cálculo de distâncias:

$$Dist_{Max}(D_\mu, IP_\Psi) = Max_{IP_{\psi_i} \in IP_\Psi} d(D_\mu, IP_{\psi_i})$$

e a seguinte ordem de preferência é estabelecida:

$$D \leqslant^{Max}_{IP_\Psi} D' \text{ sse } Dist_{Max}(D, IP_\Psi) \ \leq \ Dist_{Max}(D', IP_\Psi)$$

O operador sintático de maioria, notado por $FND_{\Delta^\Sigma}$, utiliza o seguinte cálculo de distâncias:

$$Dist_\Sigma(D_\mu, IP_\Psi) = \sum_{IP_{\psi_i} \in IP_\Psi} d(D_\mu, IP_{\psi_i})$$

e a seguinte ordem de preferência:

$$D \leqslant^{\Sigma}_{IP_\Psi} D' \text{ sse } Dist_\Sigma(D, IP_\Psi) \ \leq \ Dist_\Sigma(D', IP_\Psi)$$

Os termos selecionados para compor a nova base serão os termos em $\Gamma$, com $\mid k(D_\mu, D_\psi) \mid$ mínimo, associados aos termos $D_\mu$ escolhidos segundo o critério de ordenação do operador aplicado.

**Exemplo 4** *Considere o exemplo 3. Para cada termo $D_\mu$ e para cada base $IP_\psi$ são observadas as distâncias $\mid k(D_\mu, D_\psi) \mid$ calculadas anteriormente. Abaixo as distâncias mínimas $d(D_\mu, IP_\psi)$ são apresentadas. Aplicando-se os critérios de distância e ordenação dos operadores de arbitração e maioria, tem-se:*

| $D_\mu$ | $d(D_\mu, IP_{\psi_1})$ | $d(D_\mu, IP_{\psi_2})$ | $d(D_\mu, IP_{\psi_3})$ | $Dist_{Max}$ | $Dist_\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 |
| $\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$ | 1 | 1 | 1 | **1** | **3** |

*Onde os valores em negrito apontam o termo selecionado pelos operadores segundo suas respectivas ordens de preferência. A base resultante do processo de fusão pela aplicação dos operadores de arbitração e maioria é dada pelos termos de $\Gamma$ com $\mid k(D_\mu, D_\psi) \mid$ mínimo relacionados ao termo de $IP_\mu$ escolhido:*

$$FND_{\Delta^{Max}_\mu} = FND_{\Delta^\Sigma_\mu} = \quad (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_5) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_4 \wedge p_5)$$

A caracterização sintática do processo de fusão conduz a resultados distintos dos obtidos através do processo semântico. Este resultado é reflexo da escolha de subconjuntos mínimos que aproximam as bases originais das restrições de integridade. Esta caracterização sintática satisfaz os postulados para fusão anteriormente apresentados.

## 5. Nova Medida de Minimalidade

O princípio mais importante dentre os que regem a construção de operadores de mudança de crença é o princípio da mudança mínima. Usando a relação existente entre implicantes primários e implicados primários, define-se uma nova unidade de mudança mínima, onde um símbolo proposicional não é visto de forma isolada, como acontece no critério sugerido por Dalal [Dalal 1988], mas relacionado à estrutura da base de crenças. A nova medida atribui maior importância àqueles literais que representam um número maior de cláusulas. Ou seja, considera-se como *menor unidade de conhecimento* uma *cláusula* no conjunto de implicados primários. Porém, não são observadas todas as cláusulas associadas aos literais contraditórios de $D_\psi$ e $D_\mu$, mas somente as cláusulas que estão *criticamente* envolvidas pelos literais, conforme seu conjunto de *coordenadas exclusivas*. Ou seja:

$$\widehat{k}(D_\psi, D_\mu) = \cup_{i=1}^{k} \widehat{F}_c^i$$

onde $\widehat{F}_c^i$ é o conjunto de coordenadas exclusivas associadas a cada literal $L_i \in D_\psi \cap \overline{D_\mu}$. Assim, a distância mínima de um termo $D_\mu$ para uma base $IP_\psi$ é dado pelo menor número de coordenadas exclusivas associadas aos literais contraditórios entre o termo $D_\mu$ e os termos $D_\psi$ de $IP_\psi$:

$$\widehat{d}(D_\mu, IP_\psi) = \min(\{|\widehat{k}(D_\psi, D_\mu)| \mid D_\psi \in IP_\psi\})$$

Com esta nova medida de minimalidade redefinem-se os operadores sintáticos de arbitração e maioria. O novo operador de arbitração $FND_{\widehat{\Delta}^{Max}}$ tem seu critério de distância dado por:

$$Dist_{Max}(D_\mu, IP_\Psi) = Max_{IP_{\psi_i} \in IP_\Psi} \widehat{d}(D_\mu, IP_{\psi_i})$$

e ordem de preferência entre termos é mantida. O critério de distância usado pelo operador sintático de maioria baseado nas coordenadas exclusivas dos literais contraditórios, notado por $FNC_{\widehat{\Delta}^{\Sigma}}$, é:

$$Dist_\Sigma(D_\mu, IP_\Psi) = \sum_{IP_{\psi_i} \in IP_\Psi} \widehat{d}(D_\mu, IP_{\psi_i})$$

mantendo-se a ordem de preferência anteriormente apresentada.

**Exemplo 5** *Considere o processo de fusão realizado entre as bases de crenças $\Psi = \{\psi_1, \psi_2\}$, com as restrições de integridades dadas por $\mu$, conforme os seguintes conjuntos de implicantes e implicados primários representados em notação quantum:*

$$IP_{\psi_1} = 1 : p_1^{\{1,2\}} \wedge p_2^{\{3\}}, 2 : p_2^{\{3\}} \wedge p_3^{\{1\}} \wedge p_4^{\{2\}}$$
$$PI_{\psi_1} = 1 : p_1^{\{1\}} \vee p_3^{\{2\}}, 2 : p_1^{\{1\}} \vee p_4^{\{2\}}, 3 : p_2^{\{1,2\}}$$

$$IP_{\psi_2} = 1 : p_1^{\{1\}} \wedge p_2^{\{2\}}, 2 : \neg p_3^{\{3\}} \wedge p_4^{\{4\}} \wedge \neg p_5^{\{5\}}$$
$$PI_{\psi_2} = 1 : p_1^{\{1\}}, 2 : p_2^{\{1\}}, 3 : \neg p_3^{\{2\}}, 4 : p_4^{\{2\}}, 5 : \neg p_5^{\{2\}}$$

$$IP_\mu = 1 : \neg p_1^{\{1\}} \wedge \neg p_3^{\{2\}} \wedge \neg p_4^{\{3\}} \wedge p_5^{\{4\}}, 2 : \neg p_2^{\{1,2\}} \wedge \neg p_3^{\{3\}} \wedge p_5^{\{4\}}$$
$$PI_\mu = 1 : \neg p_1^{\{1\}}, 2 : \neg p_2^{\{2\}} \vee \neg p_3^{\{1\}}, 3 : \neg p_2^{\{2\}} \vee p_4^{\{1\}}, 4 : p_5^{\{1,2\}}$$

*A tabela abaixo mostra o cálculo dos termos candidatos, bem como os conjuntos de termos contraditórios e as distâncias dadas pelo conjunto de coordenadas exclusivas associadas aos literais contraditórios:*

| $D_\psi \in IP_\Psi$ | $D_\mu$ | $D \in \Gamma$ | $D_\psi \cap \overline{D_\mu}$ | $\mid \cup_{i=1}^{k} \widehat{F}_c^i \mid$ |
|---|---|---|---|---|
| $\{p_1, p_2\}$ | $\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{p_1^{\{\boxed{1,2}\}}\}$ | 2 |
| $\{p_2, p_3, p_4\}$ | $\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{p_3^{\{\boxed{1}\}}, p_4^{\{\boxed{2}\}}\}$ | 2 |
| $\{p_1, p_2\}$ | $\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$ | $\{p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_5\}$ | $\{p_2^{\{\boxed{3}\}}\}$ | 1 |
| $\{p_2, p_3, p_4\}$ | $\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$ | $\{\neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}$ | $\{p_2^{\{\boxed{3}\}}, p_3^{\{\boxed{1}\}}\}$ | 2 |
| $\{p_1, p_2\}$ | $\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{p_1^{\{\boxed{1}\}}\}$ | 1 |
| $\{\neg p_3, p_4, \neg p_5\}$ | $\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | $\{p_4^{\{\boxed{4}\}}, \neg p_5^{\{\boxed{5}\}}\}$ | 2 |
| $\{p_1, p_2\}$ | $\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$ | $\{p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_5\}$ | $\{p_2^{\{\boxed{2}\}}\}$ | 1 |
| $\{\neg p_3, p_4, \neg p_5\}$ | $\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$ | $\{\neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}$ | $\{\neg p_5^{\{\boxed{5}\}}\}$ | 1 |

*Observando as distâncias mínimas entre os termos em $IP_\mu$ e as bases de crenças tem-se:*

| $D_\mu$ | $d(D_\mu, IP_{\psi_1})$ | $d(D_\mu, IP_{\psi_2})$ | $Dist_{Max}$ | $Dist_\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| $\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$ | 2 | 1 | 2 | 3 |
| $\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$ | 1 | 1 | **1** | **2** |

*Onde os valores em negrito mostram a escolha dos operadores de arbitração e maioria. A base resultante do processo de fusão é dada por:*

$$FND_{\widehat{\Delta}_\mu^{Max}} = FND_{\widehat{\Delta}_\mu^{\Sigma}} = \quad (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_5) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_4 \wedge p_5)$$

*Se a medida usual de distância fosse utilizada, ambos os termos $D_\mu$ seriam escolhidos e a base resultante conteria, além dos termos apresentados acima, o seguinte termo: $(\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \wedge p_5)$ por ser mínimo com relação ao literal $p_1$ de $IP_{\psi_1}$ e as cláusulas $1$, $2$ e $3$ de $IP_{\psi_1}$ seriam alteradas ao invés de somente a cláusula $3$.*

## 6. Conclusão

A eficácia de sistemas baseados em conhecimento está intimamente relacionada ao formalismo adotado para a representação de conhecimento. Este artigo apresentou como implicantes primários podem ser utilizados para realizar processos de fusão de crenças de modo sintático. Também foi introduzida uma nova unidade mínima de mudança, baseada na representação em implicantes e implicados primários, que permite preservar um número maior de cláusulas nas bases originais.

As formas normais primárias apresentam propriedades interessantes para serem exploradas em sistemas baseados em conhecimento. A primeira, e mais importante, é a unicidade - cada fórmula lógica possui somente uma representação em formas normais primárias, o que assegura o princípio da irrelevância da sintaxe. Além disso, o princípio da mudança mínima é assegurado pela introdução de uma nova medida de minimalidade.

O uso de formas normais primárias tem sido investigado em processos de revisão de crenças [Bittencourt et al. 2004], atualização de crenças [Marchi et al. 2005] e fusão de crenças [Perrussel et al. 2008]. Como trabalhos futuros, pretende-se investigar a aplicação de tais formas em problemas de planejamento [Fourman 2000].

## Referências


Bittencourt, G. (1998). Concurrent inference through dual transformation. *Logic Journal of the IGPL*, 6(6):795–834.

Bittencourt, G., Marchi, J., and Padilha, R. S. (2003). A Syntactic Approach to Satisfaction. In Konev, B. and Schimidt, R., editors, $4^{th}$ *International Workshop on the Implementation of Logic (LPAR03)*, pages 18–32. University of Liverpool and University of Manchester.

Bittencourt, G., Perrussel, L., and Marchi, J. (2004). A syntactical approach to revision. In Mántaras, R. L. and Saitta, L., editors, *Proceedings of the 16$^{th}$ Europ. Conf. on Artificial Intelligence (ECAI'04)*, pages 788–792, Valencia, Spain. IOS Press.

Dalal, M. (1988). Investigations Into a Theory of Knowledge Base Revision: Preliminary Report. In Rosenbloom, P. and Szolovits, P., editors, *Proceedings of the 7$^{th}$ National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'98)*, volume 2, pages 475–479, Menlo Park, California. AAAI Press.

Darwiche, A. and Marquis, P. (2001). A Perspective on Knowledge Compilation. In *Proceedings of the 17$^{th}$ International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'01)*, pages 175–182, Seattle, Washington, USA.

Fourman, M. (2000). Propositional planning. In *AIPS-Workshop on ModelTheoretic Approaches to Planning*, pages 10–17.

Konieczny, S. and Pérez, R. P. (2002). Merging information under constraints: a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5):773–808.

Liberatore, P. and Schaerf, M. (1995). Arbitration: A commutative operator for belief revision. In *Proceedings of the Second World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence (WOCFAI'1995*, pages 217–228.

Liberatore, P. and Schaerf, M. (1998). Arbitration (or how to merge knowledge bases). *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 10(1):76–90.

Lin, J. and Mendelzon, A. O. (1999). Knowledge base merging by majority. In *In Dynamic Worlds: From the Frame Problem to Knowledge Management*. Kluwer.

Marchi, J., Bittencourt, G., and Perrussel, L. (2005). A syntactical approach to belief update. In Gelbukh, A., Álvaro Albornoz, and Terashima-Marín, H., editors, *Proceedings of the Mexican International Conference on Artificial Intelligence (MICAI'05)*, pages 142–151, Monterrey, Mexico. Springer Verlag LNAI 3789.

Perrussel, L., Marchi, J., and Bittencourt, G. (2008). Quantum-based belief merging. In *Proceedings of the 11th Ibero-American Conference on AI (IBERAMIA'08)*, pages 21–30, Lisbon, Portugal. Springer-Verlag.

Revesz, P. Z. (1993). On the semantics of theory change: Arbitration between old and new information. In *In Proceedings of the Twelfth ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Databases*, pages 71–82.