

# Objetos de aprendizagem generalizáveis para o currículo de Matemática do ensino médio

Alexandre Direne, Andrey Pimentel, Gabriel Ramos, Diego Marczal,  
Eros Carvalho, Marcos Castilho, Laura García,  
Fabiano Silva, Luis Bona, Marcos Sunye

C3SL - Depto de Informática – Universidade Federal do Paraná (UFPR)  
Caixa Postal 15.064 – 81.531-980 – Curitiba – PR – Brasil

{alex,d,andy,gabriel,diego,emc06,marcos,laura,fabiano,bona,sunye}@inf.ufpr.br

**Abstract.** *New concepts and software tools for supporting the acquisition of knowledge in different areas of Maths are described, along with their application in school-level contexts. Few past works have been found in the scientific literature about Learning Objects (LO) which allow discovery learning through reflexive environments aimed at skill acquisition. The formal definition of meta-cognitive factors of such LO is presented as a key element that underlies performance evaluation in problem solving tasks. Multiple external representation techniques are applied to the design of such LO. The generalisation of the referred model is suggested through the implementation of various LO based on the proposed techniques. Finally, future research perspectives are discussed.*

**Resumo.** *Novos conceitos e ferramentas de software para apoiar o aprendizado em diferentes áreas de Matemática no ensino médio são descritos, juntamente com sua aplicação no contexto didático das escolas. Poucos trabalhos foram encontrados na literatura científica sobre Objetos de Aprendizagem (OA) que permitem o desenvolvimento de atividades exploratórias de natureza reflexiva para a aquisição de conhecimento. A composição formal de fatores metacognitivos dos referidos OA é apresentada como um elemento chave de apoio para promover a melhoria do processo de solução de problemas. Técnicas de múltiplas representações externas são utilizadas no projeto desses OA, sendo uma delas a construção de conceitos complementares. A generalização do modelo proposto é sugerida através da implementação de diversos OA com base nas técnicas propostas. Ao final são apresentadas as perspectivas de pesquisa futura.*

## 1. Introdução

O problema central de dividir e codificar o acesso a diferentes fragmentos de conteúdos educacionais levou muitos pesquisadores e praticantes de Informática na Escola a criar Objetos de Aprendizagem (OA). A reutilização desses objetos em diversos cenários pedagógicos tem sido vista como uma forte característica para justificar seus projetos relativamente simples de software [Alves, 2007]. Por exemplo, em um ambiente de ensino de Matemática, uma dada subárea como a de progressões geométricas poderia ser apoiada por um OA. Esse objeto, por sua vez, deveria ser capaz de acionar outros para motivar o aprendiz a corrigir erros que podem cobrir desde a precedência de operadores em expressões aritméticas até a simplificação algébrica.

No entanto, a prática do mundo de Informática na Educação tem visto um progresso dos OA bem mais restrito do que o comumente divulgado em relação à capacidade de um software reagir (*feedback*) a entradas adversas de um aprendiz. Em parte, essas limitações podem ser atribuídas a dificuldades puramente computacionais, dado que ainda não é possível criar mecanismos capazes de conversar fluentemente com humanos e cooperar [Choua *et alli*, 2003] de modo direto na solução de problemas [Sá *et alli*, 2007]. Porém, uma maneira alternativa de enxergar as referidas limitações está no fato de que representações textuais raramente são complementadas por outras, tais como as tipicamente gráficas, numa tentativa de ampliar o poder expressivo dos enunciados de problemas e das explicações geradas por um OA.

A intuição de que a apresentação da informação em um formato gráfico pode, em alguns casos, ter um efeito positivo na aprendizagem já foi abordada tangencialmente, por exemplo, no ensino da teoria clássica de conjuntos, que usa diagramas do famoso matemático britânico John Venn para expressar relações de união, interseção e disjunção. Nas últimas décadas, essa intuição se solidificou em um campo de estudo comum entre Pedagogia, Ciências Cognitivas e Informática chamado *múltiplas representações externas*. Embora o potencial educacional dessas representações tenha apelo intuitivo, o assunto levanta questões empíricas que só os campos particulares de conhecimento com seus conteúdos e enunciados específicos podem responder.

Em outras palavras, está aberta ao empirismo pedagógico a busca do quão efetivo é o uso de múltiplas representações externas no ensino? Qual o seu impacto real sobre a aprendizagem? Quais tarefas cognitivas as múltiplas representações auxiliam? Dada uma tarefa cognitiva envolvendo a manipulação de uma determinada informação, há algum formato de representação para essa informação mais apropriado para a execução da tarefa? Estas são algumas das questões que precisam ser respondidas empiricamente.

O assunto é intrincado e envolve o esforço conjunto das três ciências citadas. O simples teste pedagógico para estimar o impacto das múltiplas representações externas na aprendizagem, além de gerar resultados controversos [Cox *et alli*, 1999], é estéril quanto ao entendimento da razão pela qual algumas delas são efetivas e outras não. De um lado, é preciso saber quais operações cognitivas o aprendiz requer para solucionar de forma esperada um problema [Gava e Menezes, 2003], demonstrando ter adquirido compreensão do assunto ensinado. De outro lado, é preciso saber se o formato da representação que lhe é fornecido na atividade contém as informações necessárias para promover algum avanço conceitual em direção à solução de problemas substancialmente mais complexos do que os enfrentados até o momento.

A hipótese subjacente ao uso de múltiplas representações externas é que a apresentação em múltiplos formatos das informações necessárias para um aprendiz resolver problemas (*e.g.*, a notação simbólica da Lógica Booleana e os diagramas de Venn) potencializam a aprendizagem quando comparada com a apresentação da mesma informação em um único formato. O presente artigo descreve, de forma genérica, novos conceitos para o projeto e a implementação de OA com potencial para promover o desenvolvimento cognitivo por meio do uso de múltiplas representações externas no nível médio de educação escolar. Um de seus principais exemplos de aplicação é o ensino de conceitos matemáticos, os quais atingiram avanços significativos com a recente introdução de representações com papéis complementares [Ainsworth, 2006] para oferecer contextos reflexivos ao aprendiz durante a solução de problemas.

## 2. Hipóteses simplificadoras

Ainsworth aponta cinco fatores que devem ser considerados no projeto de um OA com múltiplas representações externas. São eles: (a) o número de representações; (b) a maneira como a informação está distribuída; (c) a forma das representações; (d) a sequência das representações; (e) o suporte para a tradução entre as representações. Ao projetarmos um sistema baseado em múltiplas representações externas, é preciso tomar decisões quanto a cada um desses fatores pois essas decisões terão impacto pedagógico.

Há basicamente quatro tarefas cognitivas envolvidas na manipulação de representações externas por parte de um aprendiz [Ainsworth, 2006]: (1) ele deve entender a forma da representação; (2) cria intuitivamente a relação entre a representação e o domínio representado; (3) escolhe uma representação apropriada entre várias disponíveis; (4) constrói uma nova representação apropriada se for requisitada. Entender a forma de uma representação não é um trabalho simples, pois envolve saber como a informação está codificada e quais operadores pode-se aplicar a essa representação para manipular a informação que ela codifica. Por exemplo, em um gráfico cartesiano de uma função, a maneira de encontrar máximos e mínimos se constitui em operadores para esse tipo de representação [Guizzadri *et alli*, 2003].

A atenção aos operadores é fundamental pois não é incomum operadores para um tipo de representação serem usados incongruamente em representações de outro tipo. Quando aprendizes são interpelados para selecionar um gráfico de velocidade *versus* tempo que representa um ciclista subindo e depois descendo um morro, eles deveriam escolher um gráfico com o formato de *U*, mas geralmente eles optam por um gráfico com a curvatura invertida (*i.e.*, com a aparência do próprio morro). Nesses casos, operadores sobre figuras estão sendo usados erroneamente para interpretar o comportamento da curva do gráfico. Assim, entender a forma de uma representação envolve aprender não só os seus operadores, mas também, em alguns casos, aprender a ignorar o uso de operadores inapropriados para interpretar essa representação.

A manipulação de representações envolve aprender também a relação entre a representação e o *domínio representado*, o que, para o aprendiz, pode ser mais difícil em virtude de ele deter um conhecimento parcial ou incompleto do domínio. Também aqui, a aprendizagem dos operadores a serem empregados é fundamental, só que com um ajuste ainda mais fino. Mesmo já tendo percebido quais operadores são apropriados para a representação, o aprendiz ainda precisa aprender a relacionar operadores com entidades particulares do domínio representado. Em um gráfico distância *versus* tempo, o aprendiz, tentando estimar a velocidade, geralmente examina a altura da curva, quando deveria olhar para a sua inclinação [Ainsworth, 2006]. Ambos os operadores são apropriados para o gráfico, mas captam informações distintas do domínio representado.

Por fim, aprendizes podem ser colocados na situação de construir uma representação ao invés de interpretar uma [Feitosa *et alli*, 2007]. Essa é a tarefa de maior complexidade, pois envolve as três tarefas anteriores de forma coordenada. O aprendiz precisa se familiarizar com representações, operadores, os domínios representados e em como relacioná-los para construir uma representação adequada. Ainsworth cita um estudo [Grossen e Carnine, 1990] que mostra que crianças aprendem a resolver problemas lógicos de modo mais eficiente se elas desenharem suas respostas dos problemas do que se elas selecionarem um diagrama pré-desenhado, provavelmente devido ao suporte que o processo de construção da representação dá a essas crianças.

### 3. Arquitetura geral dos OA

A arquitetura dos OA aqui descritos segue o paradigma de Orientação a Objetos, dividindo seus módulos principais em classes, com o objetivo de aumentar a chance de reuso da solução. Os OA foram projetados para que o módulo de *simulação* de um comportamento específico de domínio (*e.g.*, de uma figura geométrica *Fractal*, de uma função *Afim*, de uma série de *Juros Compostos*, etc) seja acoplado em um componente intercambiável que controla a interações. Isto permite a construção de um arcabouço de controlador genérico de interação para que vários simuladores de comportamentos em domínios diferentes possam ser desenvolvidos, acoplados e executados de maneira uniforme, com potencial reuso do OA genérico (*shell*) de maneira padronizada.

#### 3.1. Os principais módulos

Os principais módulos do OA desenvolvido e aplicado na presente pesquisa são: (a) controlador de interação; (b) simulador de tarefas do conteúdo específico; (c) teclado virtual; (d) emissor de dicas para a solução de problemas; (e) gerador de mensagens de erro. Como dito acima, o controlador é um arcabouço genérico que pode ser reutilizado em vários domínios diferentes. Ele permite acesso paginado, serial ou indexado, a partes do conteúdo específico. Tal capacidade é atingida por meio de sua estrutura interna, a qual divide qualquer conteúdo específico em três seções distintas: (1) introdução; (2) exercícios de solução de problemas pré-determinados; (3) parte exploratória onde o aprendiz gera os seus próprios problemas e soluções por meio do que pode ser chamado de ambiente avançado de representações externas. O controlador também é responsável pelo ajuste de parâmetros de acessibilidade (*e.g.*, aumento progressivo do tamanho de letras, altura de som, etc.).

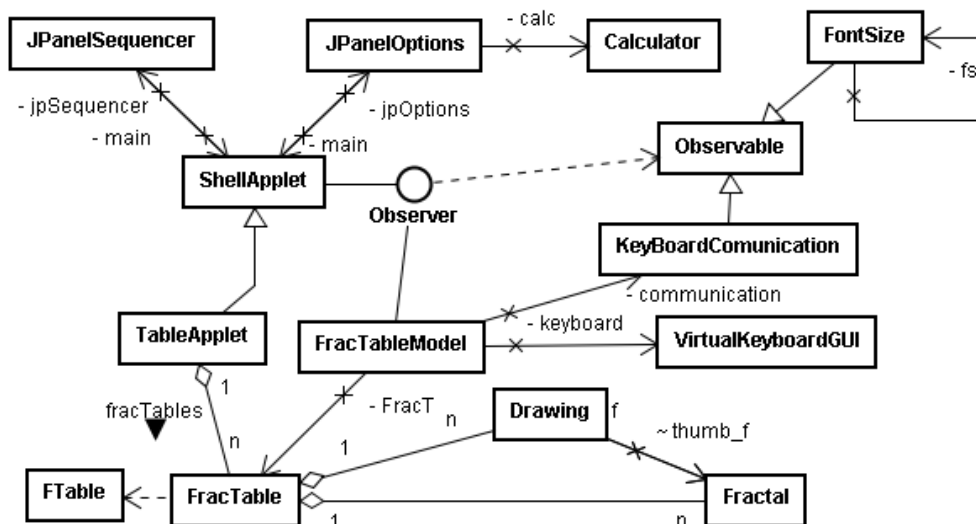
Mas não apenas de mecanismos de acessos simples é feito o controlador. Ele também permite acessos mais elaborados de apoio metacognitivo ao aprendiz. Um exemplo disso está na possibilidade do aprendiz retroceder ao contexto de erros cometidos no passado, uma vez que ele perceba em um dado instante a razão genérica por trás de uma incompreensão. De acordo com estudos recentes [Bull e Kay, 2007], isso ajuda a promover condições para a reflexão sobre os passos adotados na solução de problemas e fazer com que novos caminhos de solução sejam tentados ou mesmo.

Os demais módulos fazem parte do domínio específico abordado pelos OA do padrão aqui descrito. Em um dos OA produzidos pela presente equipe de pesquisa e desenvolvimento, o domínio específico de progressões geométricas em Fractais foi o escolhido. Sendo assim, o simulador de comportamento, o emissor de dicas e o gerador de mensagens de erro foram criados como partes do conteúdo específico. O módulo de simulação de Fractais efetua os cálculos para a construção das imagens das figuras geométricas, as quais refletem graficamente, como uma representação externa altamente intuitiva, vários conceitos de progressões geométricas. Para melhorar o acesso ao conteúdo, o módulo do teclado virtual é responsável por aspectos mais refinados da interação. Ele permite que o aprendiz manipule dados numérico-analíticos para a entrada de fórmulas em modo visual bidimensional, deixando tais fórmulas com aspecto muito mais realista do que se costuma ver em outras situações.

#### 3.2. O modelo arquitetural em mais detalhes

As classes que compõem a arquitetura detalhada dos OA aqui apresentados está na Figura 1. Tais módulos já incluem os de manipulação do conteúdo e específico de progressões geométricas em Fractais, desenvolvido como um entre vários de uma série

do mesmo padrão. A classe principal do controlador é a *ShellApplet*, enquanto que a classe principal do simulador de figuras geométricas de Fractais é a *TableApplet*. Cada um dos diversos exercícios do OA de progressões geométricas em Fractais é um objeto da classe *FracTable*. A decisão de qual exercício deve ser apresentado é tomada pela classe *JpanelSequencer* do controlador. São utilizados padrões de projeto, como MVC e Observador [Gamma *et alli*, 2000], para melhorar a independência funcional da solução adotada [Pressman, 2006]. O padrão *Observer* é usado para permitir o controle do simulador diminuindo a dependência entre as classes.



**Figura 1: Modelo arquitetural do OA de progressões geométricas em Fractais**

Este modelo de arquitetura permite a generalização e a reutilização. Os aspectos genéricos que estão sendo aplicados incluem, além de progressões geométricas em Fractais, também os seguintes domínios: (a) Funções Afim com exemplos sobre o coeficiente de elasticidade de molas; (b) Funções Cíclicas, ou trigonométricas, com exemplos sobre projeções de sombras e movimento de objetos do mundo real; (c) Matemática Financeira, com exemplos de jogos e desafios dependentes do cálculo de juros simples e compostos.

### 3.3. Detalhes de implementação

A implementação do OA foi feita seguindo técnicas de programação Orientada a Objetos usando a plataforma Java. Os OA já implementados e os que estão em fase de implementação foram projetados para serem executados por meio de qualquer navegador da Internet de forma independente de sistema operacional ou hardware. Para isso eles foram concebidos como *Applets* anexados ao ambiente de navegação. Dessa forma, a execução de um OA fica independente de plataforma e de tecnologia.

O uso de Java permite também que o código seja divulgado como aberto, na forma de Software Livre, com licença GPL. Uma versão de carga em navegador do OA de progressões geométricas em Fractais pode ser encontrado no seguinte endereço:

<http://condigital.c3sl.ufpr.br/fractal>

O código aberto na forma de licença GPL está temporariamente no endereço:

<http://git.c3sl.ufpr.br/gitweb?p=condigital/fractal.git;a=summary>

Cabe ainda ressaltar que todas as implementações de software feitas durante a execução do presente projeto estarão disponíveis no Banco Internacional de Objetos Educacionais do MEC (Ministérios da Educação) do governo federal em um futuro breve.

#### **4. Aspectos de interatividade**

Os OA do padrão aqui descrito tendem a ser ambientes exploratórios para o aprendizado de conceitos de Matemática. Dada a experiência adquirida em pouco mais de um ano de projeto, implementação e testes, acredita-se agora que os conceitos, ferramentas e hipóteses simplificadoras adotadas são suficientemente genéricas para serem aplicadas a outros campos do ensino de ciências, tais como Física e Química. Na interação com o aprendiz, é permitida a exploração dos conceitos adquiridos através de exercícios. Alguns desses exercícios são orientados por uma interação mais fortemente situada [Souza, 2005], ao contrário de outros que oferecem maior liberdade.

##### **4.1. Contexto de aplicação**

Em um dos OA construídos durante o projeto, explorou-se o fato das figuras geométricas da classe dos Fractais possuírem em sua estrutura, muitos aspectos cujo comportamento pode ser representado por uma progressão geométrica. Por exemplo, no *Triângulo de Sierpinsky*, a evolução dos tamanhos dos lados de cada triângulo nos diferentes passos de formação do Fractal obedece a uma progressão geométrica. No passado, idéias semelhantes do uso de Fractais para explorar conceitos de progressões geométricas também foram tentadas [Brandão, 2002], mas com um apoio muito restrito por parte do software, o qual não era de natureza pedagógica.

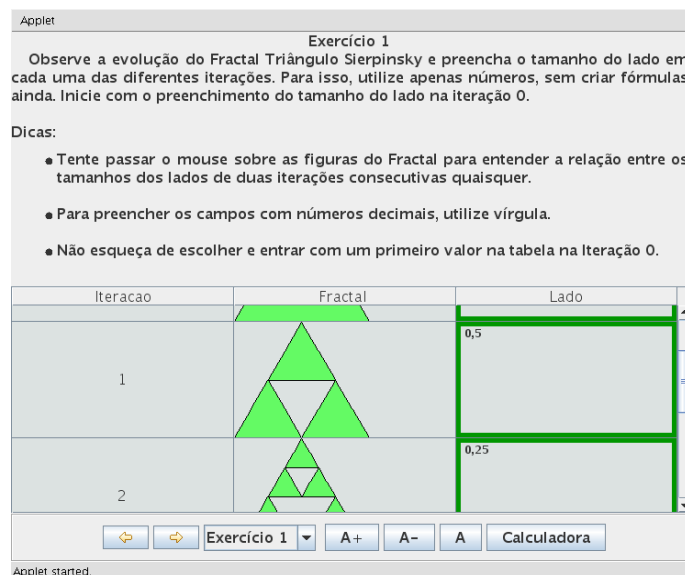
No exemplo do conteúdo específico de progressões geométricas em Fractais, a concepção do OA foi a de um software tipicamente de apoio didático para atividades em sala de aula. Todavia, devido ao seu bom grau de reatividade a erros cometidos por aprendizes na solução de problemas, esse OA pode ser usado como ferramenta exploratória de aprendizagem autônoma. A sua utilização assume, conforme explicado anteriormente, que o aprendiz já foi iniciado nos conceitos de progressões geométricas antes de utilizar o software. Opcionalmente, o professor poderá falar com antecedência também da relação entre progressões geométricas e Fractais.

O OA usa várias técnicas de múltiplas representações externas para tentar ajudar o aprendiz a compreender melhor os conceitos de progressão geométrica. Para isso, o aprendiz explora esses conteúdos navegando entre diferentes representações que possuem *papéis complementares* no contexto da interação. O exemplo mais forte de aplicação de representações com papéis complementares está nos aspectos visuais dos lados progressivamente menores de um Fractal à medida em que os passos de sua formação avançam. É na proporção entre os lados de dois passos consecutivos que reside a associação entre o formalismo algébrico-analítico de progressões geométricas e a sua representação visual complementar. Outras proporções das dimensões de Fractais são também abordadas, tais como áreas e quantidades de sub-figuras (*e.g.*, triangulares).

##### **4.2. Dinâmica de uso da interface**

Depois de uma breve introdução panorâmica sobre algumas relações e conceitos de um conteúdo específico, o uso da interface dos OA aqui referidos segue uma sequência bem definida de exercícios para, só então, permitir maior liberdade de exploração ao aprendiz.

Por exemplo, no OA de progressões geométricas em Fractais, essa sequência de exercícios tem dois objetivos principais. O primeiro deles é o de utilizar informações visuais (figuras de Fractais) para ampliar a gama de representações externas que ilustram os tradicionais conceitos algébrico-analíticos das progressões geométricas. O segundo é ambientar o aprendiz com o estilo de navegação entre as diferentes representações externas com as quais ele deve lidar.



**Figura 2: Interação com o OA por meio de dados puramente numéricos**

De acordo com o que consta no parágrafo anterior, durante o primeiro exercício deve ocorrer o envolvimento gradual com o estilo de interação e com as ferramentas de manipulação conceitual por meio da entrada de dados puramente numéricos, como ilustrado na Figura 2. Nesse exercício, a interação é controlada de maneira que o aprendiz responda com dados de tamanho do lado do *menor* triângulo visível que compõe o Fractal em um determinado passo. Em alguns casos, o menor triângulo pode ser até difícil de ser enxergado mas o valor de seu lado pode ser calculado (assim como o de sua área). Adicionalmente, o aprendiz só poderá avançar de um passo para outro do Fractal após ter fornecido o valor do passo atual de maneira correta.

Nos exercícios seguintes, o aprofundamento analítico é cada vez mais exigido. Isso é feito por meio da entrada de termos genéricos das progressões geométricas, os quais são dependentes de duas variáveis especiais:  $l$  e  $n$ , sendo  $l$  o tamanho do lado e  $n$  o número de passos de formação do Fractal. Nesse segundo exercício, o aprendiz é levado a expressar as dimensões em termos de  $l$  e  $n$ , obrigatoriamente. Um exemplo de interação no segundo exercício é apresentado na Figura 3.

Para manipular uma entrada de dados do tipo numérico-analítica, é necessário um estilo diferente de mecanismo de interação. Esse mecanismo é um teclado virtual, ilustrado na Figura 4. O teclado virtual usa a metáfora de uma calculadora científica estendida, onde é possível a entrada de expressões mais complexas com a visualização bidimensional imediata da mesma. No caso de todos os OA do padrão aqui proposto, é possível a entrada de expressões em função das variáveis  $l$  e  $n$ , usando, além das quatro operações normais e parênteses, potenciação e radiciação, o que está em conformidade com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para a área de Matemática.



Applet

Exercício 3

Se você entendeu bem a progressão geométrica com que o tamanho do lado muda de acordo com a iteração, será fácil trabalhar agora com o perímetro do mesmo Fractal (Triângulo Sierpinsky). Para isso, preencha o perímetro em cada uma das iterações por meio de uma expressão que é função de alguns valores. Neste exercício, você também não poderá utilizar números com a vírgula decimal.

Dicas:

- Clique no primeiro campo de perímetro.
- Note que o teclado virtual possui as teclas especiais  $\ell$  (tamanho do lado na iteração 0) e  $n$  (ordem da iteração genérica).
- Tente passar o mouse sobre as figuras do Fractal para entender a relação entre os tamanhos dos lados de duas iterações consecutivas quaisquer.

Iteracao	Fractal	Lado	Perimetro	Observacao
0		$\ell$	$3 \times \ell$	
1		$\frac{\ell}{2}$	$3 \times 3 \times \frac{\ell}{2}$	

Applet started.

**Figura 3: Interação com o OA usando dados numérico-analíticos**

Em resumo, desde o primeiro exercício, o aprendiz é confrontado com a necessidade de expressar as formas com que as dimensões do Fractal evoluem de um passo para o outro. A partir de um determinado ponto, ele é induzido a explicitar essas relações de maneira analítica. Nesse novo momento, o aprendiz é levado a calcular o valor da dimensão desejada em um passo de ordem muito alta, fora da seqüência inicial de quatro ou cinco passos apenas. Isso significa que ele atingiu o ápice pois agora deve representar as relações de forma genérica, para o  $n$ -ésimo passo de formação do Fractal.

Teclado Virtual

$$\frac{\ell}{2^2}$$

1	2	3	4	5
6	7	8	9	0
$\ell$	$n$	+	-	x
$\sqrt{\quad}$	$x^y$	$\div$	( )	,
Enviar	←	Limpa		

**Figura 4: Teclado Virtual para a entrada de dados numérico-analíticos.**

Finalmente, a partir dos conhecimentos adquiridos com as atividades no contexto do OA, um professor em sala de aula, seguindo o Guia do Professor, tem a opção de fazer análises que introduzem os primórdios do cálculo infinitesimal (pouco visto no ensino médio). Por exemplo, em vários Fractais, quando o  $n$ -ésimo passo tende a infinito, o perímetro também tende a infinito, mas, apesar disso, ele circunda uma área de tamanho finito, que inclusive cabe em uma pequena porção da tela do computador. Acredita-se que é exatamente essa nova forma de lidar com noções adversas a principal responsável pela ampliação do raciocínio abstrato durante o ensino médio (ver Parâmetros Curriculares Nacionais). Sendo assim, tanto o software como o Guia do



Professor recomendam que sejam discutidas em conjunto as respostas para perguntas tais como:

- Você notou que os diversos perímetros, além formarem uma PG crescente, também são uma função do tamanho do lado e do valor da iteração?
- A progressão geométrica tem razão positiva, maior do que 1 (um). O que isso provoca sobre o perímetro do Fractal após muitas iterações?
- Aplique a mesma análise aos valores da coluna “Área total”.

## 5. Conclusão e trabalhos futuros

O texto apresentou novos conceitos e ferramentas de software para apoiar o ensino e a aprendizagem de conteúdos da disciplina de Matemática do nível médio escolar. Três linhas de pesquisa foram tomadas como fundamentais para a criação dos modelos de solução: (a) arquiteturas genéricas de Objetos de Aprendizagem; (b) interação por meio de tarefas reflexivas sobre o conteúdo específico; (c) o uso de múltiplas representações externas para permitir a visualização contextual de dados sobre a solução de problemas. Vários domínios da Matemática foram utilizados como campo de aplicação dos conceitos, por meio dos quais um arcabouço de software mostrou seu amplo potencial de aplicação.

Portanto, com a classe de OA aqui proposta, pode-se sugerir que os módulos principais desta arquitetura, tais como o controlador de interação, permitem a construção de cenários pedagógicos variados. Sobre o aspecto de reflexividade, acredita-se que a aquisição de novas habilidades do aprendiz na solução de problemas do domínio pode vir simplesmente da pura comparação entre múltiplas representações que possuem papéis complementares. Sob um ângulo metacognitivista de análise do conjunto de idéias aqui apresentadas, os OA também deslocam as fronteiras do conhecimento original sobre múltiplas representações pois na comparação entre esquemas computacionais com finalidade educacional, os OA de outras pesquisas passadas se preocuparam predominantemente apenas com fatores de reuso e engenharia.

A partir deste ponto, novos estudos serão conduzidos para validar o modelo, integrando os OA implementados em ambientes reais de atuação colaborativa dos laboratórios das escolas. A ampliação da base de casos de problemas da Matemática deverá abrir novas possibilidades de solução de problemas para aprendizes que utilizam simultaneamente os OA do arcabouço deste trabalho. Isso, em princípio, tende a promover melhorias no desempenho dos usuários, principalmente nos casos em que há interesse por aspectos reflexivos. Por exemplo, em Fractais, o conceito de *recursividade* deverá evoluir para *monitoramento passo-a-passo* para que um aprendiz possa não apenas retroceder a uma situação onde um erro ocorreu mas também obter explicações contextualizadas [Murray, 1999] sobre tais erros. Porém, para que isso seja atingido em sua plenitude, será necessário expandir também a linguagem de representação dos conteúdos com novos e mais avançados papéis complementares.

## 6. Agradecimentos

O projeto é financiado pela iniciativa de âmbito nacional intitulada **CONDIGITAL**, com recursos de **FNDE** por meio do **Edital 001/07 MEC/MCT**. Os autores do presente artigo agradecem aos seus parceiros de consórcio (LACTEC, UEL, CETEPAR) por conduzirem outros projetos complementares em outras mídias que não são software.

## 7. Referências

- Ainsworth, S. (2006). DefT – A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16 (3), 183-198.
- Alves, G. (2007). Um estudo sobre o desenvolvimento da visualização geométrica com o uso do computador. *Anais do XVIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (SBIE)*, 3-12, São Paulo/SP.
- Brandão, L. O. (2002), Estudando Algoritmos e Fractais com programas de Geometria Descritiva, *Revista do Professor de Matemática*, n. 49, pp. 27-34, 2002.
- Bull, S., Kay, J. (2007). Student Models that Invite the Learner In: The SMILI Open Learner Modelling Framework. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 17:(2), 89-120.
- Choua, C., Chanb, T., Linc, C. (2003). Redefining the learning companion: the past, present, and future of educational agents. *Computers & Education*, 40 (3), 255–269.
- Cox, R.; Stenning, K.; Oberlander, J. (1999) Contrasting the cognitive effects of graphical and sentencial logic teaching: reasoning, representation and individual differences. Edingburgh: Human Communicate Research Center University of Edingburgh.
- Feitosa, A., Direne, A., Silva, F., Bona, L., Guedes, A., Castilho, M., Sunye, M., Garcia, L. (2007). Definição formal de táticas de Xadrez por meio da autoria incremental de conceitos heurísticos. *Anais do XVIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (SBIE)*, 244-253, São Paulo – SP.
- Gamma, E; Helm, R.; Johnson, R. and Vlissides, (2000), J. Padrões de Projeto: Soluções Reutilizáveis de Software Orientado a Objetos, Bookman.
- Gava, T., Menezes, C. (2003). Uma ontologia de domínio para a aprendizagem colaborativa. *Anais do XIV Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (SBIE)*, 355-364, Rio.
- Grossen, B., & Carnine, D. (1990). Diagramming a logic strategy e Effects on difficult problem types and transfer. *Learning Disability Quarterly*, 13(3), 168-182.
- Guizzadri, R., Aroyo, L., Wagner, G. (2003). Help&Learn: A Peer-to-Peer Architecture to Support Knowledge Management in Collaborative Learning Communities. *Anais do XIV Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (SBIE)*, 285-394, Rio.
- Murray, T. (1999). Authoring intelligent tutoring systems: An analysis of the state of the art. *International Journal of Artificial Intelligence and Education*, 10 (1), 98-129.
- Pressman, R. S. (2006), Engenharia de Software, McGraw-Hill, 6a. Edição.
- Sá, E., Teixeira, J., Fernandes, C. (2007). Design de Atividades de Aprendizagem que usam Jogos como princípio para Cooperação. *Anais do XVIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, (SBIE)*, 607-616, São Paulo – SP.
- Souza, C. (2005). *The Semiotic Engineering of Human-Computer Interaction*. MIT Press.